Laboratorio di Economia e Finanza delle Imprese di Assicurazioni

Anno Accademico 2018-2019

Prof. Aggr. Arsen Palestini

MEMOTEF, Sapienza Università di Roma

Arsen.Palestini@uniroma1.it

Indice

1 Richiami di Matematica Finanziaria **5**
1.1 Principali nozioni di Matematica Finanziaria 6
1.1.1 Capitalizzazione e attualizzazione 7
1.1.2 Regime dell'interesse composto 7
1.1.3 Valutazione di operazioni finanziarie e flussi di cassa . . . 9
1.1.4 Rendite 10
1.1.5 Esercizi svolti e proposti 13

2 Richiami di Probabilità **19**
2.1 Definizioni e proprietà elementari 19
2.1.1 Probabilità condizionata 22
2.1.2 Indipendenza tra eventi 22
2.1.3 Esercizi svolti e proposti 24
2.2 Variabili aleatorie 26
2.2.1 Variabili aleatorie discrete 27
2.2.2 Variabili aleatorie continue 31
2.2.3 Esercizi svolti e proposti 35

3 Strumenti di Matematica Attuariale **39**
3.1 Funzioni di sopravvivenza 39
3.1.1 Principali funzioni di sopravvivenza 44
3.1.2 Esercizi svolti e proposti 45
3.2 Funzioni biometriche e tavole di mortalità 48
3.2.1 Esercizi svolti e proposti 51

4 Teoria delle assicurazioni **55**
4.1 Il contratto di assicurazione 55
4.1.1 Il Principio di Equivalenza Attuariale 60
4.1.2 Premi e caricamenti 62
4.1.3 Caso vita 64

4.1.4 Caso morte 69
4.1.5 La riserva matematica e la sua equazione di ricorrenza . . 71
4.1.6 Esercizi svolti e proposti 73

Bibliografia consigliata **79**

Capitolo 1

Richiami di Matematica Finanziaria

Per capire la notazione e le numerose formule della Matematica Attuariale (o delle Assicurazioni) abbiamo bisogno di alcuni principi preliminari di Matematica Finanziaria e di Calcolo delle Probabilità.

Per quanto riguarda la Matematica Finanziaria, è di fondamentale importanza tutto ciò che riguarda la valutazione dei flussi di cassa futuri, ossia le formule e i metodi di attualizzazione delle rendite e delle operazioni finanziarie. Queste formule vanno ricordate anche nel caso 'deterministico', ossia qualora non ci sia alcun elemento di incertezza, caso molto irrealistico. La teoria relativa a queste nozioni e formule si può trovare sulle mie dispense sul sito $https : //www.memotef.uniroma1.it/node/6239$ oppure su un testo 'classico' come quello di Moriconi (1994).

D'altra parte, il Calcolo delle Probabilità è proprio quell'area della Matematica che studia e analizza i fenomeni incerti ed aleatori, definendo rigorosamente le *variabili aleatorie*, le loro *distribuzioni di probabilità* e *funzioni di ripartizione*, e tutti gli indicatori connessi a tali variabili (in particolare la *media* e la *varianza*). Le applicazioni del Calcolo delle Probabilità alla Finanza sono particolarmente naturali, perché il valore aleatorio di qualsiasi titolo di Borsa può essere facilmente descritto tramite una variabile aleatoria. In questo caso, la media assume il significato di *rendimento medio* o *rendimento atteso*, mentre la varianza, essendo una misura di scostamento dal rendimento medio, quantifica bene il *rischio* del relativo asset.

In questa breve dispensa, compaiono solo i concetti di base, vale a dire quelli che saranno utili per poi interpretare e capire i modelli basilari di Matematica Attuariale. Un testo consigliato è il Baldi (1998) o qualsiasi testo che tratti queste definizioni e proprietà di base. Per le teorie successive della Finanza

Matematica (equazioni differenziali stocastiche, dinamiche aleatorie di tassi e azioni, ecc.) vi rimando a testi più complessi e completi (ad esempio Pascucci e Runggaldier, 2009).

1.1 Principali nozioni di Matematica Finanziaria

Presentiamo qui, in maniera molto sintetica, una selezione di concetti di base di Matematica Finanziaria, soprattutto quelli che riguardano la valutazione dei capitali e dei flussi di cassa nel tempo, tramite le nozioni di **capitalizzazione** e di **attualizzazione**.

Il concetto di **importo** e quello di **tempo** sono inscindibilmente legati in Matematica Finanziaria: la disponibilità di una qualsiasi quantità di denaro, ad esempio 1.000 euro, assume un significato diverso se pensata nell'istante presente, o tra un mese, o tra un anno, o tra 20 anni. Questo per 2 motivazioni essenziali, che riassumiamo di seguito:

- In qualsiasi sistema economico, il denaro non mantiene intatto il suo valore, in termini di potere d'acquisto, nel corso del tempo, ossia esiste una (piccola o grande) **inflazione**. Di conseguenza, se il tasso di inflazione annuo è positivo, 1000 euro oggi non saranno equivalenti a 1000 euro tra 1 anno, perchè l'inflazione, nel corso dell'anno, avrà diminuito il valore di 1000 euro in termini reali. Ad esempio, se il tasso annuo di inflazione è 1%, 1000 euro oggi sono uguali a $1000(1.01)^{-1} = 990.099$ euro.

- L'impiego, o investimento, di un ammontare di denaro, viene fatto soltanto in condizioni vantaggiose, cioé che permettano di ottenere in un istante futuro, un ammontare maggiore. Non ci sarebbe alcun incentivo a prestare del denaro, quindi a privarsene per un periodo equivalente alla durata del prestito, se il prestito non fosse rimborsato con un piccolo interesse. Questo principio è ad esempio alla base dell'emissione e della vendita di obbligazioni, come i Titoli di Stato, che devono (dovrebbero, ad essere precisi) avere sempre un tasso di rendimento positivo. Se oggi un BoT a 1 anno costa 99 euro per rimborsare 100 euro tra un anno, il possesso di 99 euro oggi equivale a quello di 100 tra un anno.

Quindi ogni importo va sempre legato al tempo in cui esso è disponibile, o esigibile. Ci vuole un pò di terminologia, che ora introdurremo, basata in particolare sugli approcci seguiti in Moriconi [M] e Ritelli [R]. Inoltre, la seguente trattazione è parzialmente ripresa dalle dispense disponibili all'indirizzo $https://www.memotef.uniroma1.it/node/6239$ ([PA]).

1.1.1 Capitalizzazione e attualizzazione

Da ora in avanti, indicheremo con:

- $C > 0$ il **capitale iniziale** investito;
- $I > 0$ l'**interesse** relativo all'impiego di C per tutta la durata dell'investimento;
- $M > 0$ il **montante** di C alla scadenza dell'investimento.

All'istante concordato come scadenza dell'investimento, il debitore dovrà versare al creditore l'importo corrispondente al montante, legato al capitale iniziale e all'interesse dalla semplice relazione additiva:

$$M = C + I. \tag{1.1.1}$$

La (1.1.1) mette in evidenza la dipendenza del montante dal capitale iniziale, tramite una **legge di capitalizzazione**, che andrebbe definita in modo formale.

Questo é un esempio di come, nella Matematica utilizzata nelle varie formalizzazioni economiche, uno stesso strumento o concetto possa essere interpretato in modi differenti. Abbiamo dunque risposto alla domanda 'Qual é l'importo maturato al tempo finale dell'investimento dal capitale C?' con il montante M. Poniamoci ora la domanda inversa: 'Quale capitale bisogna investire al tempo iniziale per ottenere un montante finale M?' e per rispondere dovremo invertire la legge di capitalizzazione che associa C ad M e definire un'operazione di **attualizzazione o di sconto** (o anche, con un linguaggio meno moderno, di **anticipazione**): C sarà definito il **valore attuale** di M al tempo iniziale.

$C \longrightarrow M$	$C \longleftarrow M$
capitalizzazione	**attualizzazione**

1.1.2 Regime dell'interesse composto

Dopo aver visto una legge di capitalizzazione lineare ed una iperbolica, veniamo finalmente al regime finanziario di tipo esponenziale. Per fornire una prima spiegazione intuitiva, immaginiamo una forma di capitalizzazone in cui, istante dopo istante, il montante maturato gioca il ruolo di capitale iniziale e la formazione del montante prosegue continuamente. Riferendoci alla definizione di legge di capitalizzazione, $M(t_1 + t_2; C) = M(t_2; M(t_1; C))$, vale a dire il montante al tempo $t_1 + t_2$ coincide con quello maturato fino a t_1, ulteriormente reinvestito fino a t_2.

Definizione 1. *La **legge di capitalizzazione degli interessi composti** ha la forma:*

$$M(t) = C(1+i)^t, \tag{1.1.2}$$

dove i é il tasso annuo di interesse.

La proprietà di scindibilità segue in modo piuttosto automatico dalle caratteristiche di una qualsiasi funzione esponenziale, più in generale delle potenze. Come anche nei regimi lineare ed iperbolico, il montante ad un anno corrisponde a $M(1) = C(1+i)$. In seguito vedremo brevemente come il comportamento di queste funzioni differisce prima e dopo il primo anno di capitalizzazione.

Questo tipo di regime é in assoluto il più importante e quello che tipicamente useremo anche nella trattazione degli argomenti successivi.

Esercizio 2. ***Calcolare il valore attuale di 111 euro in un regime a interessi composti, generati da un investimento a 2 anni e 7 mesi al tasso d'interesse annuo[1] dello 0.5%. Successivamente, calcolare l'interesse generato da questo investimento.***

Trasformiamo i 2 anni e 7 mesi in $2 + \frac{7}{12} = \frac{31}{12}$ *e avremo, invertendo la formula (1.1.2), si ottiene:*

$$C = M(1+i)^{-t} = 111 \cdot (1.005)^{-31/12} = 109.578996 \text{ \textit{euro}.}$$

Infine, l'interesse prodotto dall'investimento é uguale a $M - C = 1.421004$ *euro.*

Esercizio 3. ***Consideriamo un regime di capitalizzazione a interessi composti in cui il capitale iniziale investito ammonta a 1000 euro. Supponendo di applicare un tasso annuo di interesse dell'1.32%, quanto tempo deve durare l'investimento affinchè il montante prodotto arrivi a 1400 euro?***

In questo caso l'incognita é il tempo, quindi (1.1.2) va invertita nel modo seguente (ricordando la proprietà logaritmica $\ln((1+i)^t) = t \cdot \ln(1+i)$*):*

$$(1+i)^t = \frac{M}{C} \implies \ln((1+i)^t) = \ln\left(\frac{M}{C}\right) \implies t = \frac{\ln\left(\frac{M}{C}\right)}{\ln(1+i)}.$$

Sostituendo i dati dell'esercizio, avremo:

$$t = \frac{\ln(1.4)}{\ln(1.0132)} = \frac{0.336472}{0.013113} = 25.65818 \text{ \textit{anni}.}$$

Trasformando ulteriormente in mesi e giorni, troveremo che il tempo richiesto risulta 25 anni, 7 mesi e 27 giorni.

[1] In questa dispensa, useremo per i numeri decimali la notazione anglosassone, con il punto al posto della virgola.

1.1.3 Valutazione di operazioni finanziarie e flussi di cassa

Consideriamo dunque un regime finanziario a interessi composti, quindi con funzione di capitalizzazione esponenziale $r(t) = (1+i)^t = e^{\delta t}$, la sua reciproca $v(t) = \dfrac{1}{r(t)} = e^{-\delta t}$ come legge di attualizzazione, e la forza d'interesse costante $\delta = \ln(1+i)$.

Uno dei problemi fondamentali della Matematica Finanziaria é la valutazione di una qualsiasi operazione finanziaria

$$\underline{x}/\underline{t} = \{x_1, \ldots, x_N\} \,/\, \{t_1, \ldots, t_N\},$$

ossia il calcolo del suo valore, ad una qualsiasi data, precedente, intermedia o successiva allo scadenzario dell'operazione. Ricordiamo che per operazione finanziaria si intende una successione di capitali in entrata (se positivi) o in uscita (se negativi), ognuno dei quali a una specifica data. Ad esempio, $\{100, -200\} \,/\, \{1, 3\}$ significa che 100 euro vanno incassati dopo 1 anno dal tempo presente, e 200 euro vanno invece pagati dopo 3 anni dal tempo presente, che assumiamo essere $t_0 = 0$. Se gli importi sono tutti positivi, si può parlare di *flusso di cassa*. In generale, se il tempo iniziale è 0, l'operazione finanziaria è anticipata, ossia decorre dall'istante iniziale. Altrimenti, il primo importo è esigibile o pagabile successivamente, e si può definire posticipata.

Per introdurre la valutazione, diamo la seguente definizione.

Definizione 4. *Si chiama* ***valore dell'operazione finanziaria*** $\underline{x}/\underline{t}$ *al tempo* t *la quantità:*

$$W(t,\ \underline{x}) = \sum_{k=1}^{N} x_k e^{\delta(t-t_k)} = \sum_{t_k \le t} x_k e^{\delta(t-t_k)} + \sum_{t_k > t} x_k e^{\delta(t-t_k)} = M(t,\ \underline{x}) + A(t,\ \underline{x}), \tag{1.1.3}$$

dove i due addendi rappresentano rispettivamente il montante generato dagli importi esigibili (o pagabili) alle scadenze anteriori a t *(*$M(t,\ \underline{x})$*) e il valore attuale delle somme esigibili (o pagabili) in date successive a* t *(*$A(t,\ \underline{x})$*).*

Una scrittura alternativa di (1.1.3), usando il tasso annuo i in luogo della forza d'interesse δ, é:

$$\begin{aligned} W(t,\ \underline{x}) = \sum_{k=1}^{N} x_k (1+i)^{t-t_k} &= \sum_{t_k \le t} x_k (1+i)^{t-t_k} + \sum_{t_k > t} x_k (1+i)^{(t-t_k)} = \\ &= M(t,\ \underline{x}) + A(t,\ \underline{x}). \end{aligned} \tag{1.1.4}$$

Quando poi la valutazione di (1.1.3) viene attuata al primo o all'ultimo istante dello scadenzario, abbiamo solo uno dei due addendi, cioè nel primo caso avremo soltanto il valore attuale e nel secondo solo il montante.

Definizione 5. *Si chiama* ***valore attuale dell'operazione finanziaria*** $\underline{x}/\underline{t}$ *la quantità:*

$$W(t_1,\ \underline{x}) = \sum_{k=1}^{N} x_k e^{\delta(t_1 - t_k)} = \sum_{k=1}^{N} x_k (1+i)^{t_1 - t_k} = A(t_1,\ \underline{x}). \tag{1.1.5}$$

Definizione 6. *Si chiama* ***montante dell'operazione finanziaria*** $\underline{\boldsymbol{x}}/\underline{\boldsymbol{t}}$ *la quantità:*

$$W(t_N,\ \underline{\boldsymbol{x}}) = \sum_{k=1}^{N} x_k e^{\delta(t_N - t_k)} = \sum_{k=1}^{N} x_k (1+i)^{t_N - t_k} = M(t_N,\ \underline{x}). \tag{1.1.6}$$

1.1.4 Rendite

La rendita è un'operazione finanziaria di grande importanza. Qui la definizione formale:

Definizione 7. *Si chiama* ***rendita*** *una successione di capitali da riscuotere (o da pagare) a scadenze determinate.*

I singoli capitali della rendita si dicono **rate**. Le rendite certe sono quelle a priori fissate nel numero, nell'ammontare e nelle epoche di pagamento. Una rendita é detta **periodica** quando le rate sono equiintervallate tra loro, **costante** se le rate sono tutte dello stesso ammontare, **perpetua** se il numero delle rate è infinito. Una distinzione importante da fare é quella tra rendite cosiddette **anticipate**, quelle in cui il pagamento delle rate avviene all'inizio di ogni periodo, e quelle **posticipate**, nelle quali invece avviene alla fine.

Facendo qualche esempio dalla vita di ogni giorno, in generale il pagamento dello stipendio per i dipendenti é effettuato in rate posticipate, mentre per gli inquilini il versamento dell'affitto ai proprietari di case é in rate anticipate.

Uno dei problemi connessi con lo studio delle rendite é la loro valutazione, cioè la determinazione di una somma che si può considerare finanziariamente equivalente alla rendita in un dato istante di tempo. Come nelle operazioni finanziarie in generale, questa somma si dirà **valore** della rendita. Nella teoria delle rendite, l'utilizzo del regime finanziario ad interessi composti é standard. Chiameremo t_0 e t_N gli istanti rispettivamente iniziale e finale di decorrenza della rendita.

Definizione 8. *Il* ***montante di una rendita*** *é il suo valore riferito al tempo finale t_N.*

Se si pensa alla rendita come ad una successione di somme in entrata, é il capitale che si ottiene se tutte le rate, appena riscosse e fino all'istante finale, vengono investite al tasso impiegato per la valutazione.

Definizione 9. *Il valore riferito al tempo t_0 o ad un altro istante t antecedente a t_0 si chiama **valore attuale della rendita**.*

Il valore attuale rappresenta la somma che, impiegata a partire dall'istante di riferimento ed in base alla legge usata per la valutazione stessa, risulta esattamente sufficiente a produrre tutte le rate della rendita alle scadenze previste.

Se il tempo di riferimento della valutazione t precede quello di decorrenza della rendita, si parla di rendita **differita** della durata $t_0 - t$. Se invece l'istante t scelto per la valutazione coincide con l'istante iniziale t_0, la rendita é **immediata**. Abbiamo bisogno di alcune formule di Analisi Matematica sulle serie numeriche per ottenere le espressioni di valore attuale e montante delle rendite costanti.

- $$\sum_{j=1}^{N} v^j = v + v^2 + \ldots + v^N = v \cdot \frac{1 - v^N}{1 - v}.$$

- $$\sum_{j=0}^{N} v^j = 1 + v + v^2 + \ldots + v^N = 1 + v \cdot \frac{1 - v^N}{1 - v} = \frac{1 - v^{N+1}}{1 - v}.$$

- $$\sum_{j=1}^{\infty} v^j = \lim_{N \longrightarrow +\infty} \sum_{j=1}^{N} = \frac{v}{1 - v}.$$

- $$\sum_{j=0}^{\infty} v^j = v^0 + \sum_{j=1}^{\infty} v^j = 1 + \frac{v}{1 - v} = \frac{1}{1 - v}.$$

Consideriamo ora i il tasso annuo d'interesse e $v = (1+i)^{-1}$ il fattore annuo di sconto, e supponiamo che il valore di ciascuna rata sia unitario, vale a dire $R = 1$. Il valore attuale di una rendita rappresenta il capitale che, investito al tasso d'interesse i per la durata di N anni a partire dall'istante di riferimento, genera esattamente tutte le rate della rendita.

Una formula di grandissima importanza è quella del **valore attuale di una rendita annua unitaria immediata posticipata di durata N anni con tasso annuo costante i**:

$$a_{\overline{N}|i} = \frac{1 - (1+i)^{-N}}{i}. \tag{1.1.7}$$

Vediamo brevemente come si ricava: essendo $R = 1$, la determinazione del valore attuale si riduce al calcolo della serie geometrica seguente:

$$v + v^2 + v^3 + \ldots + v^N = \sum_{j=1}^{N} v^j = v \cdot \frac{1 - v^N}{1 - v} =$$

$$= \frac{1}{1+i} \frac{\frac{(1+i)^N - 1}{(1+i)^N}}{\frac{i}{1+i}} = \frac{1 - (1+i)^{-N}}{i},$$

scritto in termini di tasso annuo di interesse.

La formula (1.1.7), di notevole importanza e da ricordare rigorosamente, introduce un nuovo simbolo: $a_{\overline{N}|i}$ (che si legge a **figurato** N **al tasso** i) é una funzione crescente in N e decrescente in i. Se invece la rendita suddetta è costante ma non unitaria, ossia $R \neq 1$, è sufficiente moltiplicare tutto per R per avere il valore attuale:

$$Ra_{\overline{N}|i} = R\frac{1 - (1+i)^{-N}}{i}.$$

Da questa formula, ne seguono alcune altre, per indicare i valori attuali di rendite con caratteristiche differenti. Consideriamo sempre il tasso annuo di interesse i costante.

Nel caso di differimento di t anni, ossia del caso in cui ogni rata va scontata per ulteriori t anni, avremo che il **valore attuale di una rendita annua unitaria posticipata e differita di t anni** sarà:

$$_{t|}a_{\overline{N}|i} = v^{t+1} + v^{t+2} + \ldots + v^{t+N} = v^t \sum_{j=1}^{N} v^j = v^{t+1} \cdot \frac{1 - v^N}{1 - v} = v^t a_{\overline{N}|i}.$$

Tale relazione vale per ogni t positivo ma non necessariamente intero.

Quando invece la rendita è anticipata, ogni rata va scontata un anno in meno rispetto alla rendita posticipata. Il **valore attuale di una rendita annua unitaria anticipata immediata di durata N anni** sarà:

$$\ddot{a}_{\overline{N}|i} = \sum_{j=0}^{N-1} v^j = 1 + v + v^2 + \ldots + v^{N-1} = \frac{1 - v^N}{1 - v}.$$

Vale la seguente relazione tra i valori attuali:

$$\ddot{a}_{\overline{N}|i} = (1+i)a_{\overline{N}|i}.$$

Naturalmente la valutazione delle rendite può anche essere fatta calcolando il montante, cioè capitalizzando le rate fino all'ultimo anno: la prima per $N-1$ anni, la seconda per $N-2$ anni, la penultima per un solo anno e l'ultima non viene invece capitalizzata. Quindi il **montante di una rendita annua unitaria posticipata immediata di durata N anni** sarà dato da:

$$s_{\overline{N}|i} = \sum_{j=1}^{N}(1+i)^{N-j} = (1+i)^{N-1}+\ldots+(1+i)+1 = \frac{1-(1+i)^N}{1-(1+i)} = \frac{(1+i)^N-1}{i}.$$

Da questa formula segue la facile relazione:

$$s_{\overline{N}|i} = (1+i)^N a_{\overline{N}|i}.$$

Invece, il **valore attuale di una rendita annua unitaria anticipata immediata di durata N anni e differita di t anni** ha la forma:

$$_{t|}\ddot{a}_{\overline{N}|i} = v^t + v^{t+1} + \ldots + v^{t+N-1} = v^{t-1}\sum_{j=1}^{N} v^j = v^t\frac{1-v^N}{1-v} = v^t\ddot{a}_{\overline{N}|i}.$$

Infine, la formula del **montante di una rendita annua unitaria immediata anticipata di durata N anni** risulta:

$$\ddot{s}_{\overline{N}|i} = (1+i)^N + (1+i)^{N-1} + \ldots + (1+i) =$$

$$= (1+i)^N\sum_{j=0}^{N-1}((1+i)^{-1})^j = (1+i)^N\frac{1-(1+i)^{-N}}{1-(1+i)^{-1}} = (1+i)^N\ddot{a}_{\overline{N}|i}.$$

Svolgiamo ora alcuni esercizi in cui utilizziamo le formule enunciate in precedenza.

1.1.5 Esercizi svolti e proposti

Esercizio 10. *Data l'operazione finanziaria $\underline{x}/\underline{t} = \{10, 20, -30\}/\{1, 2, 3\}$, calcolarne il valore dopo 1 anno e mezzo al tasso annuo di valutazione dell'1%.*

Ricordando che lo scadenzario é espresso in anni, applichiamo la formula (1.1.3) al tempo $t = 1.5$, quindi capitalizzando il primo importo ed attualizzando gli altri 2:

$$W(1.5, \underline{\boldsymbol{x}}) = 10\cdot(1+0.01)^{1.5-1} + 20\cdot(1+0.01)^{1.5-2} + (-30)\cdot(1+0.01)^{1.5-3} =$$

$$= 10.049 + 19.9 - 29.555 = 0.394 \textit{ euro.}$$

Finora, abbiamo assunto l'esistenza di un unico tasso di interesse fisso, costante per tutti gli anni durante i quali si svolge l'operazione finanziaria. Più realisticamente, può accadere che i tassi di valutazione cambino negli anni, per esempio in corrispondenza di un aumento dell'inflazione annua. In tal caso, il fattore di attualizzazione cambia analogamente. Nel prossimo esercizio consideriamo una struttura di tassi crescente, e valutiamo un flusso di cassa in base a questa struttura di tassi non 'piatta'.

Esercizio 11. ***Data l'operazione finanziaria***

$$\underline{x}/\underline{t} = \{1000, 1250, 1300, 1500\}/\{1, 2, 3, 4\},$$

calcolarne il valore attuale data la seguente struttura dei tassi (detto $i(0, k)$ ***il tasso spot di mercato per operazioni finanziarie dal tempo*** 0 ***al tempo*** $k > 0$***):***

$$i(1, 2) = i(1, 3) = 1.5\%, \qquad\qquad i(1, 4) = 1.6\%.$$

Siccome ogni importo del flusso di cassa va valutato a seconda del tasso corrispondente, avremo:

$$W(0,\ \underline{x}) = 1000 + 1250(1,015)^{-1} + 1300(1.015)^{-2} + 1500(1.016)^{-3} =$$

$$= 1000 + 1231.527 + 1261.86 + 1430.244 = 4923.631 \textit{ euro.}$$

Esercizio 12. ***Calcolare il valore attuale ed il montante di una rendita immediata posticipata annua di rata*** 1400 ***euro e durata*** 15 ***anni, nel regime dell'interesse composto e secondo il tasso di valutazione del*** 2.4% ***annuo.***

Applicando la formula del valore attuale, con $N = 15$*, e successivamente moltiplicando per la rata* $R = 1.400$*, otteniamo:*

$$Ra_{\overline{N}|i} = \frac{R}{i}(1 - (1 + i)^{-N}) = \frac{1400}{0.024}(1 - (1.024)^{-15}) = 17462.128 \textit{ euro.}$$

Per il calcolo del montante, ci basta capitalizzare a 15 anni il valore attuale trovato, ossia:

$$s_{\overline{N}|i} = (1 + i)^N a_{\overline{N}|i} = (1.024)^{15} \cdot 17462.128 = 24922.781 \textit{ euro.}$$

Esercizio 13. ***Data una rendita costante anticipata di durata 8 anni, calcolare la rata*** R ***tale che il valore attuale della rendita sia uguale a*** 11500 ***euro se valutata a un tasso dell'***1.4% ***annuo. Calcolarne successivamente anche il montante.***

Poichè sappiamo che

$$R\ddot{a}_{\overline{N}|i} = R(1+i)a_{\overline{N}|i},$$

impostiamo l'equazione seguente sostituendo i dati in nostro possesso:

$$11500 = (1.014)\frac{1-(1.014)^{-8}}{0.014}R,$$

da cui ricaviamo semplicemente R:

$$R = \frac{11500 \cdot 0.014}{1.014 \cdot (1-(1.014)^{-8})} = 1508.413 \text{ euro.}$$

Il montante si può calcolare poi in due modi: o capitalizzando il valore attuale della rendita data all'inizio:

$$Rs_{\overline{N}|i} = (1.014)^8 \cdot 11500 = 12852.91 \text{ euro.}$$

Oppure, avendo la rata, applicando la formula del montante di rendita anticipata:

$$Rs_{\overline{N}|i} = 1508.413 \cdot (1.014)^8 \cdot (1.014) \cdot \frac{1-(1.014)^{-8}}{0.014} = 12852.907 \text{ euro.}$$

Al solito, un errore di $0.003 = 3 \cdot 10^{-3}$ *euro é trascurabile.*

Chiaramente, un'applicazione immediata e comprensibile delle rendite sta proprio nei flussi di cassa delle pensioni, e questo ci porta già in ambito attuariale. Naturalmente, se la rendita deve partire molto in là nel tempo, è particolarmente difficile attualizzarla al tasso 'giusto', quindi si devono assumere delle ipotesi (forti) sui tassi in vigore negli anni futuri. Per ora non inseriamo alcun elemento aleatorio, ossia supponiamo di sapere esattamente quando inizierà il trattamento pensionistico e per quanto tempo durerà. Sapere la durata della rendita pensionistica equivale a sapere precisamente il tempo in cui essa finisce, cioè il tempo di morte, e questo, ovviamente, è impossibile, per cui in Matematica Attuariale, la durata di vita è una variabile aleatoria. Supponendo che la rendita parta tra h anni e duri ulteriori k anni, il valore attuale è quello di una rendita differita, quindi, detta R la rata costante:

$$_{h|}\ddot{a}_{\overline{k}|i} = v^h\frac{1-v^k}{1-v} = v^h\ddot{a}_{\overline{k}|i}.$$

Esercizio 14. ***Calcolare il valore attuale di una rendita pensionistica costante di* 1000 *euro al mese, che decorre* 3 *anni dopo l'istante attuale, e che dura ulteriori* 11 *anni, assumendo un tasso di valutazione annuo costante del* 2%*, prima e durante tutto il periodo della rendita.***

Essendo la rendita di tipo mensile, bisogna preliminarmente trasformare il tasso annuo di interesse in un tasso mensile equivalente. Ricordiamo la formula di conversione tra tassi in regime esponenziale dell'interesse composto. Detto m *il numero di periodi in cui è suddiviso l'anno, e detto* $i_{1/m}$ *il tasso periodale equivalente a quello annuo, vale:*

$$i_{1/m} = (1+i)^{1/m} - 1. \tag{1.1.8}$$

In questo caso, quindi, $m = 12$, $i_{1/12}$ *è il tasso mensile dato da:*

$$i_{1/12} = (1.02)^{1/12} - 1 = 0.16\%.$$

Quindi, trasformando tutto in mesi, i mesi di differimento sono $12 \cdot 3 = 36$ *e la durata della rendita è di* $12 \cdot 11 = 132$*, quindi il valore attuale sarà:*

$$_{36|}a_{\overline{132}|0.0016} \cdot 1000 = (1.0016)^{-36} \frac{1-(1.0016)^{-132}}{1-(1.0016)^{-1}} \cdot 1000 = 112256.651 \textit{ euro.}$$

Esercizio 15. ***Considerando tutti i dati del precedente esercizio, calcolare il valore attuale della stessa rendita pensionistica, ma in cui è stavolta prevista la tredicesima mensilità annua in ognuno degli* 11 *anni di rendita, vale a dire, l'ultima mensilità di ogni anno risulta raddoppiata.***

In questo caso, non si può più applicare un'unica formula perchè la rendita non è più costante, infatti ogni anno ci sono 11 *importi da* 1000 *e il dodicesimo, quello corrispondente al mese di Dicembre, da* 2000.

Possiamo però sommare al valore attuale della rendita calcolato nel precedente esercizio il valore attuale di una seconda rendita, quella solo 'delle tredicesime'. Siccome cadono una volta all'anno, è praticamente una rendita annua, posticipata. Quindi il tasso di interesse da applicare sarà quello annuo, e il suo valore attuale sarà:

$$1000\,_{3|}a_{\overline{11}|0.02} = (1.02)^{-3} \frac{1-(1.02)^{-11}}{1-(1.02)^{-1}} \cdot 1000 =$$

$$= \frac{(1.02)^{-3} - (1.02)^{-14}}{0.02} \cdot 1000 = 9222.365. \textit{ euro.}$$

Di conseguenza, il valore attuale dell'intera rendita è la somma dei 2 *valori attuali ricavati:*

$$112256.651 + 9222.365 = 121479.016 \quad \textit{euro.}$$

I seguenti esercizi possono essere utili per fare pratica sugli argomenti di questa Sezione:

1. **Data l'operazione finanziaria**

   $$\underline{x}/\underline{t} = \{500, K, 700, 1000 + K\}/\{1, 2, 3, 4\},$$

   da valutare al tasso annuo di interesse $i = 1,2\%$, calcolare il valore di K affinchè il suo valore attuale sia di 3000 euro.

   [454.707]

2. **Data una rendita annua di rata R, di 13 annualità, stabilire R affinchè il suo montante sia di 50000 euro, sapendo che il tasso semestrale di mercato è $i_{1/2} = 0.8\%$.**

   [$R = 3489.306$]

3. **Supponendo di versare in un fondo delle rate annuali anticipate di ammontare 2.000 euro, sapendo che ogni rata si rivaluta al tasso annuo di interesse dell'1.3%, stabilire in quanto tempo si accumulano 15000 euro.**

   [7 anni, 1 mese, 10 giorni]

Altri concetti di base di Matematica Finanziaria utili per la Matematica Attuariale saranno eventualmente richiamati successivamente. Ora è invece necessario fornire alcuni principi basilari di Teoria della Probabilità (presi quasi integralmente dalle dispense [PA]).

Capitolo 2

Richiami di Probabilità

La notazione utilizzata in questa Sezione è tratta da Baldi (1998). Consideriamo un qualsiasi fenomeno aleatorio, che prevede più di un possibile risultato, e che non abbiamo la facoltà di conoscere con certezza. Possiamo pensare all'esito di un lancio di un dado, all'estrazione dei numeri della tombola, all'ordine di arrivo di un Gran Premio di Formula 1, all'andamento del vostro fondo azionario, ecc.

2.1 Definizioni e proprietà elementari

Chiamiamo Ω l'insieme dei possibili risultati, e consideriamo una qualsiasi famiglia $\mathcal{E}$ di sottoinsiemi di Ω. Gli elementi di $\mathcal{E}$ saranno indicati come **eventi**.

Definizione 16. *Dati 2 qualsiasi eventi $E_1,\ E_2 \in \mathcal{E}$, chiameremo:*

- $E_1 \cup E_2$ ***evento unione****, corrispondente al verificarsi di almeno uno tra gli eventi E_1 ed E_2;*
- $E_1 \cap E_2$ ***evento intersezione****, corrispondente al verificarsi di entrambi gli eventi E_1 ed E_2;*
- E_1^C ***evento complementare****, corrispondente al non verificarsi dell'evento E_1.*

Il nostro scopo é quello di associare ad ogni evento una funzione probabilità che ne quantifichi, appunto, la probabilità che esso avvenga. A questo scopo, ci servono alcune definizioni rigorose.

Definizione 17. *Una famiglia $\mathcal{E}$ di sottoinsiemi di un insieme Ω si dice una σ-**algebra** se valgono le seguenti proprietà:*

1. $\emptyset,\ \Omega \in \mathcal{E}$*;*

2. *se* $E \in \mathcal{E}$*, allora* $E^C \in \mathcal{E}$*;*

3. *se* $E_1, \dots, E_n, \dots \in \mathcal{E}$*, allora*

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{E}, \qquad \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{E}.$$

Definizione 18. *Dato un insieme* Ω*, e una sua* σ*-algebra di sottoinsiemi* $\mathcal{A}$*, un'applicazione* $P : \mathcal{E} \longrightarrow [0, 1]$ *si dice* ***probabilità*** *se:*

1. $P(\Omega) = 1$*;*

2. *per ogni successione* $\{E_n\}_n$ *di elementi di* $\mathcal{E}$ *disgiunti a due a due, vale:*

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n).$$

Possiamo finalmente caratterizzare l'ambiente matematico, o meglio ancora il modello, in cui analizzeremo qualsiasi tipo di situazione soggetta ad incertezza.

Definizione 19. *Chiamiamo* ***spazio di probabilità*** *una terna* $(\Omega,\ \mathcal{E},\ P)$ *in cui* Ω *é un insieme,* $\mathcal{E}$ *é una* σ*-algebra di sottoinsiemi di* Ω *e* P *é una probabilità.*

In generale, per ogni fenomeno aleatorio si può costruire, in modo soggettivo, uno spazio di probabilità. Ma valutazioni differenti sulle probabilità relative a certi eventi possono dare luogo alla costruzione di spazi differenti. Ad esempio, nel caso di un evento calcistico, differenti persone potranno associare differenti probabilità alla vittoria di una squadra o dell'altra oppure al pareggio. Sicuramente, il nostro scopo é facilitato in presenza di eventi che hanno naturalmente la stessa probabilità (cosiddetti **equiprobabili**), e sui quali esiste una valutazione oggettiva. Sempre nell'ambito del gioco, vediamo questo esempio.

Esempio 20. *Supponiamo di voler lanciare 2 volte una monetina, che prima dell'avvento dell'euro aveva quasi sempre una testa su una delle due facce (ad esempio le ormai dimenticate 100 o 200 lire). Se la nostra monetina non é in alcun modo truccata, ad ogni lancio gli eventi Testa e Croce sono equiprobabili. Sui due lanci, ci sono quattro eventi possibili:*

E_{TT}=*{esce Testa sia al primo che al secondo lancio};*

E_{TC}=*{escono Testa al primo lancio e Croce al secondo lancio};*

E_{CT}=*{escono Croce al primo lancio e Testa al secondo lancio};*

E_{CC}=*{esce Croce sia al primo che al secondo lancio}.*

Oltre ad essere equiprobabili, tali eventi sono ***incompatibili****, vale a dire qualunque di essi avvenga rende impossibile che ne avvenga qualsiasi altro. Nel caso di eventi incompatibili, é particolarmente semplice verificare le ipotesi delle definizioni, infatti:*

$$\Omega = \{TT,\ TC,\ CT,\ CC\},$$

e $\mathcal{E}$ é l'insieme delle parti di Ω, vale a dire l'insieme di tutti i sottoinsiemi di Ω, compresi Ω stesso e l'insieme vuoto $\emptyset$. Di conseguenza, l'intersezione dei 4 eventi é l'insieme vuoto, che quindi appartiene a $\mathcal{E}$, e la loro unione é tutto l'insieme Ω, e quindi sono contemporaneamente verificate la prima e la terza ipotesi affinchè $\mathcal{E}$ sia una σ-algebra. La seconda ipotesi é evidente perchè tutti i sottoinsiemi complementari, cioè composti da 3 elementi di Ω, appartengono all'insieme delle parti.

Essendo gli eventi equiprobabili, ognuno di essi dovrebbe avere probabilità 1/4 (un caso favorevole su 4 casi possibili), quindi si avrà:

$$P(E_{TT}) = P(E_{TC}) = P(E_{CT}) = P(E_{CC}) = \frac{1}{4},$$

$$P(E_{TT} \cup E_{TC} \cup E_{CT} \cup E_{CC}) = P(\Omega) = 1,$$

$$P(E_{TT}) + P(E_{TC}) + P(E_{CT}) + P(E_{CC}) = 1/4 + 1/4 + 1/4 + 1/4 = 1,$$

e quindi, poichè le quantità a primo membro coincidono, P é effettivamente una probabilità per questo modello.

In generale, se E_1 ed E_2 sono eventi incompatibili, come da definizione:

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2), \qquad P(E_1 \cap E_2) = P(\emptyset) = 0.$$

Inoltre, dato un qualsiasi evento $E \in \mathcal{E}$, $E \cup E^C = \Omega$, $E \cap E^C = \emptyset$, di conseguenza:

$$P(E^C) = 1 - P(E). \tag{2.1.1}$$

Teorema 21. *Dati 2 eventi $E_1,\ E_2 \in \mathcal{E}$, vale la seguente formula:*

$$P(E_1) + P(E_2) = P(E_1 \cup E_2) + P(E_1 \cap E_2). \tag{2.1.2}$$

Esercizio 22. ***Dato un gruppo di 50 ragazze, delle quali 20 giocano a volley e 15 giocano a basket. Sapendo che 5 di loro praticano entrambi gli sport, calcolare la probabilità che, selezionando una ragazza a caso, lei non giochi a nulla?***

Gli eventi da considerare e le loro rispettive probabilità sono:

$E_V =$\{*la ragazza sorteggiata gioca a volley*\}, $\qquad P(E_V) = \dfrac{20}{50},$

$E_B =${*la ragazza sorteggiata gioca a basket*}, $\quad P(E_B) = \dfrac{15}{50}$,

$E_{BV} = E_V \cap E_B =${*la ragazza sorteggiata gioca a entrambi gli sport*}, *che ha probabilità* $\quad P(E_{BV}) = \dfrac{5}{50}$.

Applicando la formula (2.1.2) si ha:

$$P(E_V \cup E_B) = P(E_V) + P(E_B) - P(E_{BV}) = \frac{30}{50},$$

da cui, la probabilità che non giochi a nessuno dei 2 *sport risulta:*

$$P((E_{BV})^C) = 1 - \frac{30}{50} = \frac{2}{5}.$$

2.1.1 Probabilità condizionata

Consideriamo uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ e diamo una caratterizzazione alle probabilità degli eventi quando abbiamo un'informazione a priori. Condizionare la probabilità di un evento al verificarsi di un altro evento non implica necessariamente definire un evento condizionato, ma semplicemente raffinare la definizione dello stesso evento.

Definizione 23. *Dati 2 eventi E_1, E_2 con $P(E_2) > 0$, si dice* ***probabilità condizionata (o condizionale)*** *di E_1 rispetto ad E_2 la seguente quantit à:*

$$P(E_1 \mid E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)}. \tag{2.1.3}$$

$P(E_1 \mid E_2)$ rappresenta la probabilità che si verifichi E_1 data l'informazione che E_2 si é, contemporaneamente o in precedenza, verificato. Dalla definizione, possiamo dedurre facilmente quella che é universalmente nota come **formula di Bayes**:

$$P(E_1 \mid E_2)P(E_2) = P(E_2 \mid E_1)P(E_1).$$

2.1.2 Indipendenza tra eventi

Un concetto cruciale nel Calcolo delle Probabilità riguarda l'analisi degli eventi e della loro correlazione, ossia di quanto uno di essi dipenda da un altro, o da tutti gli altri. Quando 2 eventi non hanno alcuna forma di correlazione, le cose sono particolarmente semplici.

Definizione 24. *2 eventi E_1 ed E_2 si dicono* ***indipendenti*** *se e solo se*

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)P(E_2).$$

Definizione 25. *N eventi $E_1, \dots E_N$ si dicono* ***a due a due indipendenti*** *se e solo se*

$$P(E_i \cap E_j) = P(E_i)P(E_j),$$

$\forall\ i \neq j,\ i,\ j = 1, \dots, N$.

Per sgomberare il campo da un classico (e pericoloso) luogo comune, ogni fenomeno aleatorio che si ripete con le stesse condizioni più di una volta, é un evento indipendente dal precedente, come il lancio ripetuto di una moneta, le estrazioni del Lotto, i sorteggi di qualsiasi tipo con rimpiazzo o reimbussolamento, la generazione di numeri casuali, ecc. Per questo motivo, ad esempio, é piuttosto insensato giocare al Lotto basandosi sui ritardi dei numeri, in quanto ad ogni estrazione, sempre se non truccata, l'evento é indipendente dal precedente, e quindi le probabilità sono esattamente le stesse.

Cosa accade alla probabilità condizionata nel caso di indipendenza tra eventi? L'effetto risulta chiaro: se E_1 ed E_2 sono indipendenti, il fatto che E_2 si verifichi non condiziona in alcun modo il verificarsi di E_1 e infatti, usando la formula (2.1.3) e la definizione precedente, sempre se $P(E_2) > 0$, abbiamo:

$$P(E_1 \mid E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} = \frac{P(E_1)P(E_2)}{P(E_2)} = P(E_1),$$

ossia il vincolo di condizionamento di un evento ad un altro evento indipendente ne lascia uguale la probabilità.

Esempio 26. ***Calcolare la probabilità che, dovendo estrarre 2 numeri alla tombola in 2 diverse estrazioni con reimbussolamento, vale a dire rimettendo dentro l'urna il numero estratto inizialmente, il primo numero sia il 42 e il secondo numero sia di due cifre e abbia come prima cifra il 4.***

Le due estrazioni sono 2 eventi indipendenti, chiamiamo il primo E, che ha probabilità ovviamente 1/90, come l'avrebbe l'estrazione di ogni altro numero diverso dal 42, e il secondo F, che ha probabilità 10/90, in quanto i casi favorevoli corrispondono ai 10 numeri dal 40 al 49. Di conseguenza, essendo i 2 eventi indipendenti, la probabilità che avvengano entrambi é data dal loro prodotto:

$$P(E \cap F) = P(E)P(F) = \frac{1}{90}\frac{10}{90} = \frac{1}{810}.$$

Nei modelli come quello descritto nell'esempio precedente, si utilizza sempre lo **Schema di Bernoulli (o Schema successo-insuccesso)**, che quantifica la probabilità di K successi su N prove, e che é una nota distribuzione discreta di probabilità.

In sintesi, dato una sequenza di N prove ripetute in modo indipendente, e data $p > 0$ la probabilità di successo sulla singola prova, la probabilità $\mathcal{P}$ che ci siano K successi su N prove é la seguente:

$$\mathcal{P} = \binom{N}{K} p^K (1-p)^{N-K}, \tag{2.1.4}$$

dove

$$\binom{N}{K} = \begin{cases} \dfrac{N!}{K!(N-K)!} & \text{se } N \geq K, \\ \\ 0 & \text{se } N < K \end{cases}$$

é il **coefficiente binomiale** N **su** K, e il simbolo ! indica il **fattoriale**:

$$s! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot s,$$

per ogni $s \in \mathbb{N}$, e con la notazione $0! = 1$.

2.1.3 Esercizi svolti e proposti

Esercizio 27. ***Supponiamo di estrarre casualmente una carta da un mazzo di 40 carte napoletane. Calcolare la probabilità che la carta uscita non sia né un asso né una carta del seme dei Denari (detti anche Ori).***

Gli eventi da considerare saranno:

E_1=*{la carta estratta é un asso}, la cui probabilità é* $P(E_1) = \dfrac{1}{10}$;

E_2=*{la carta estratta é un Denaro}, la cui probabilità é* $P(E_2) = \dfrac{1}{4}$;

$E_1 \cap E_2$=*{la carta estratta é l'asso di Denari}, la cui probabilità é* $P(E_1 \cap E_2) = \dfrac{1}{40}$. *La probabilità dell'evento unione, ossia che la carta estratta sia o un qualsiasi asso oppure un qualsiasi Denaro é data dalla formula (2.1.2):*

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{10} + \frac{1}{4} - \frac{1}{40} = \frac{13}{40}.$$

Per concludere, la probabilità che la carta estratta non sia né un asso né un Denaro é l'evento complementare a $E_1 \cup E_2$, *quindi applicando (2.1.1):*

$$P((E_1 \cup E_2)^C) = 1 - P(E_1 \cup E_2) = \frac{27}{40}.$$

Allo stesso risultato, ovviamente, si poteva arrivare sommando le 9 Spade ai 9 Bastoni alle 9 Coppe, vale a dire tutte le carte degli altri semi private dei rispettivi assi (ovviamente i primi esempi sono elementari e risolvibili anche senza formule rigorose, ma bisogna apprendere la metodologia per i successivi casi più difficili).

Esercizio 28. ***Calcolare la probabilità del seguente evento: scegliendo a caso*** 5 ***lettere tra le prime*** 10 ***lettere dell'alfabeto, cioè dalla A alla L, si formi una parola con al massimo una vocale.***

Sapendo che le consonanti sono 7 *nelle prime* 10 *lettere, la probabilità che in* 5 *tentativi vengano scelte tutte consonanti è* $(0.7)^5 = 0.168$. *La probabilità di avere invece una vocale è, in base allo schema di Bernoulli,* 1 *successo su* 5 *prove, quindi la probabilità relativa è:*

$$\binom{5}{1}\left(\frac{3}{10}\right)\cdot\left(\frac{7}{10}\right)^{5-1} = 5\cdot\frac{3\cdot 7^4}{10^5} = 0.36.$$

Sommando le due probabilità, avremo $0.168 + 0.36 = 0.528$.

Esercizio 29. ***Data una roulette (numeri dallo*** 0 ***al*** 36***, calcolare la probabilità che esca lo*** 0 ***almeno una volta su*** 3 ***lanci.)***

In questo caso, utilizziamo lo schema di Bernoulli. La probabilità che lo 0 *esca nel singolo lancio è uguale a quella di tutti gli altri numeri sulla roulette, cioè* $1/37$. *Dobbiamo sommare* 3 *diverse probabilità: quella che esca una sola volta, quella che esca* 2 *volte e quella che esca tutte e* 3 *le volte. Quindi* 1, 2 *o* 3 *successi su* 3 *prove. Per* 1 *successo, si ha:*

$$\binom{3}{1}\left(\frac{1}{37}\right)^{1}\cdot\left(\frac{36}{37}\right)^{3-1} = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 1}\cdot\frac{1}{37}\cdot\frac{36^2}{37^2} = 0.07675.$$

Nel caso di 2 *successi, si ha:*

$$\binom{3}{2}\left(\frac{1}{37}\right)^{2}\cdot\left(\frac{36}{37}\right)^{3-2} = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 1\cdot 2}\cdot\frac{1}{37^2}\cdot\frac{36}{37} = 0.00213.$$

Infine, 3 *su* 3*:*

$$\binom{3}{3}\left(\frac{1}{37}\right)^{3}\cdot\left(\frac{36}{37}\right)^{3-3} = \frac{1}{37^3}\cdot 1 = 0.00002.$$

Sommando, otteniamo: $0.07675 + 0.00213 + 0.00002 = 0.0789$, *quindi una probabilità del* 7.89%. *Allo stesso risultato saremmo giunti se avessimo calcolato la* *differenza con l'evento complementare, ossia il caso di* 0 *successi su* 3 *prove. In sintesi:*

$$1 - \binom{3}{0}\left(\frac{1}{37}\right)^0 \cdot \left(\frac{36}{37}\right)^3 = 1 - \frac{36^3}{37^3} = 1 - 0.92109 = 0.07891.$$

Altri esercizi proposti:

1. **Calcolare la probabilità che, scegliendo a caso un numero tra** 1 **e** 5.000**, esso non sia pari nè inizi con la cifra** 4**.**

   [0.4]

2. **Calcolare la probabilità che, scelte a caso** 12 **cifre tra lo** 0 **e il** 9**, il numero risultante abbia solo una cifra pari (**0 **si intende pari qui).**

   [0.0029]

3. **Calcolare la probabilità che, lanciando** 5 **volte un dado a** 6 **facce, non truccato, escano** 4 **volte i numeri dal** 5 **al** 6**.**

   [0.04115]

2.2 Variabili aleatorie

In generale, nei problemi che coinvolgono fenomeni non deterministici vengono considerate delle variabili che sono funzioni del risultato di un evento aleatorio.

Definizione 30. *Dato uno spazio di probabilità* $(\Omega, \mathcal{E}, P)$*, si dice* ***variabile aleatoria (o variabile casuale)*** *una funzione* $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *tale che l'insieme* $\{\omega \mid X(\omega) \leq t\}$ *sia contenuto in* $\mathcal{E}$ *per ogni* $t \in \mathbb{R}$.

Una variabile aleatoria, spesso indicata con v.a., é dunque una funzione, definita su tutto l'insieme dei possibili risultati, tale che si possa calcolare la probabilità che essa prenda valori più piccoli di un qualsiasi numero reale t.

In questa maniera, stiamo fornendo una formulazione rigorosa di una funzione che associa dei valori numerici a dei fenomeni aleatori. Il prossimo passo consiste nella distinzione tra v.a. discrete e v.a. continue, tenendo presente che i concetti che caratterizzano sia le une che le altre (distribuzione, valore atteso, varianza, ecc.) sono comuni.

2.2.1 Variabili aleatorie discrete

Consideriamo delle v.a. X che prendano al più un'infinità numerabile di valori $x_1, \ldots, x_n, \ldots$, e semplifichiamo la notazione precedente omettendo l'argomento di ogni v.a., cioè descriviamo come eventi gli insiemi $\{X = x_i\}$, per ogni i. Dunque, possiamo scrivere, per ogni t reale, l'insieme della definizione precedente come unione al più numerabile di eventi:

$$\{X \leq t\} = \bigcup_{x_i \leq t} \{X = x_i\}.$$

Va notato che, poichè l'applicazione x é ben definita come funzione, tutti gli eventi $\{X = x_i\}$ sono a due a due disgiunti. Di conseguenza, per $t = +\infty$ l'unione degli eventi coincide con tutto Ω.

Il prossimo passo é cruciale, e consiste nel definire la densità di una v.a.:

Definizione 31. *Data una v.a. discreta X, la funzione $p : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$ tale che $p(x) := P(\{X = x\})$ é una **densità o distribuzione di probabilità** se valgono le seguenti proprietà:*

1. *$p(x) = 0$ tranne al più in un'infinità numerabile di valori;*

2. $$\sum_{x \in \mathbb{R}} p(x) = 1.$$

Sulla base di quest'ultima definizione, richiamiamo l'esempio della roulette e costruiamo, grazie allo Schema di Bernoulli, una densità discreta.

Esempio 32. *Supponiamo di lanciare un dado a 6 facce non truccato 5 volte e calcoliamo la probabilità che nei 5 lanci il numero 6 esca almeno 3 volte.*

Costruiamo la v.a. X che conta quante volte esce il numero 6, cioè

$\{X =$ numero di volte che esce il 6 su 5 lanci$\}$. La distribuzione relativa $p(\cdot)$ verrà da uno schema del tipo (2.1.4):

$$P(\{X = K\}) = \binom{5}{K} \left(\frac{1}{6}\right)^K \left(\frac{5}{6}\right)^{5-K}.$$

Notare che gli unici valori che la v.a. X può prendere sono quelli relativi ai successi, cioè al numero di lanci il cui esito é 6, vale a dire 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Per calcolare la probabilità richiesta, la procedura più semplice consiste nel passare per la sua complementare, vale a dire prima calcolare la probabilità che il 6 esca al più 2 volte e poi sottrarla da 1. Si ha:

$$P(\{X \leq 2\}) = \sum_{J=0}^{2} \binom{5}{J} \left(\frac{1}{6}\right)^J \left(\frac{5}{6}\right)^{5-J} = \left(\frac{5}{6}\right)^5 + 5\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^4 +$$

$$+10\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{5^5 + 5\cdot 5^4 + 10\cdot 5^3}{6^5} = \frac{2\cdot 5^4}{6^4}.$$

Passando alla complementare, infine:

$$P(\{X \geq 3\}) = 1 - P(\{X \leq 2\} = \frac{6^4 - 2\cdot 5^4}{6^4} \simeq 0,035493.$$

La distribuzione di Bernoulli descritta in questo caso é anche detta **legge binomiale** di parametri N (nel nostro caso, 5) e p (nel nostro caso, 1/6) e si indica con la scrittura $B(N,p)$. Alla distribuzione di probabilità, anche nel caso continuo per la verità, é naturalmente legato anche il prossimo concetto:

Definizione 33. *Data una v.a. discreta X, si chiama* ***funzione di ripartizione*** *la funzione $F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ tale che:*

$$F_X(t) = P(\{X \leq t\}) = \sum_{x\leq t} p(x).$$

Quindi, conoscere la distribuzione di probabilità una v.a. equivale in pratica a conoscerne la sua funzione di ripartizione. Alcune proprietà banali della funzione di ripartizione sono:

- $$\lim_{t\to -\infty} F_X(t) = 0;$$
- $$\lim_{t\to +\infty} F_X(t) = 1;$$
- $F_X(t)$ é non-decrescente su tutto $\mathbb{R}$.

Definizione 34. *Data una v.a. discreta X, con distribuzione $p(\cdot)$, chiamiamo* ***media (o valore atteso o speranza matematica) di*** *X il numero:*

$$E[X] = \sum_i x_i p(x_i) = \sum_i x_i P(\{X = x_i\}). \tag{2.2.1}$$

La formula (2.2.1), in cui la sommatoria viene ovviamente calcolata su tutti i valori x_i presi dalla v.a. X, definisce effettivamente la media della v.a. quando la serie é convergente, cioè è finita.

Enunciamo anche due importanti proprietà della media (la dimostrazione si può trovare su [B], pag. 46):

Proposizione 35. *Se X e Y sono due v.a. con media finita, allora:*

1. *anche la v.a. somma $X + Y$ ha media finita e inoltre:*

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y];$$

2. *per qualsiasi $k \in \mathbb{R}$ anche la v.a. kX ha media finita e inoltre:*

$$E[kX] = kE[X].$$

La media é tra gli strumenti matematici più noti ed usati anche nel linguaggio comune, a tutti i livelli. In un certo senso, anche quando da ragazzini calcoliamo la media aritmetica degli N voti di un quadrimestre, non facciamo altro che considerare inconsciamente una distribuzione di probabilità in cui ogni voto incide per un N-esimo, cioè stiamo calcolando la media di una v.a. che ha come determinazioni i singoli voti, ognuno dei quali occorre con probabilità $1/N$.

Un altro concetto fondamentale per le v.a. é quello di varianza, che rappresenta una misura della dispersione della v.a. X attorno al suo valor medio, ossia é tanto più grande quanto più i valori presi da X sono lontani dalla sua media.

Definizione 36. *Data una v.a. discreta X, con media finita, si chiama **varianza di X (o momento centrato del secondo ordine di X)** il numero:*

$$Var(X) = E[(X - E[X])^2].$$

*Inoltre, si chiama **deviazione standard di X** la radice quadrata della sua varianza:*

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)}.$$

Grazie alle suddette proprietà della media, possiamo ricavare un'interessante ed utile formula alternativa per il calcolo della varianza:

$$E[(X - E[X])^2] = E[X^2 - 2XE[X] + (E[X])^2] = E[X^2] - 2E[X]E[X] + (E[X])^2,$$

e sommando gli ultimi 2 termini otteniamo:

$$\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2. \tag{2.2.2}$$

Accenniamo ora ad un'altra importante distribuzione, che é tra l'altro utilizzata per approssimare la binomiale e che trova spazio in molti modelli probabilistici, in particolare quelli in cui si ha un grandissimo numero di prove indipendenti e una probabilità di successo piccolissima, vale a dire la **distribuzione di Poisson di parametro $\lambda > 0$**:

$$P(\{X = K\}) = \frac{\lambda^K}{K} e^{-\lambda}.$$

Da notare che il fattore $e^{-\lambda}$ é normalizzante, nel senso che serve a verificare la proprietà 2) della definizione di distribuzione, infatti per il noto sviluppo in serie della funzione esponenziale, valido per ogni esponente positivo, si ha:

$$e^{\lambda} = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^K}{K!} \implies P(\{X \leq +\infty\}) = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^K}{K!} e^{-\lambda} = 1.$$

Possiamo infine notare che il parametro λ risulta coincidere sia con il valor medio sia con la varianza di una v.a. distribuita secondo Poisson (quindi al crescere della sua media ne cresce anche la dispersione):

Proposizione 37. *Data la v.a. X con distribuzione di Poisson di parametro λ, la sua media e la sua varianza sono rispettivamente:*

1. $E[X] = \lambda$;
2. $Var(X) = \lambda$.

Come abbiamo visto in precedenza, il calcolo della media di una v.a. somma di due v.a. é immediato, quando esse hanno entrambe media finita, per una semplice proprietà di linearità. Ben maggiori sono le complicazioni che dobbiamo affrontare per il calcolo della varianza di una somma di v.a. del tipo $X + Y$; proviamo a seguire una strada standard:

$$E\left[(X + Y - E[X + Y])^2\right] = E\left[((X - E[X]) + (Y - E[Y]))^2\right] =$$

$$= E\left[(X - E[X])^2\right] + E\left[(Y - E[Y])^2\right] + 2E[(X - E[X])(Y - E[Y])],$$

e nell'ultima espressione compaiono come addendi la varianza di X, quella di Y, e infine un nuovo termine che inevitabilmente dipende da entrambe le variabili.

Definizione 38. *Date 2 v.a. X e Y, si definisce* ***covarianza di X e Y*** *il numero:*

$$Cov(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])].$$

Con questa nuova definizione, possiamo scrivere in modo completo la varianza di $X + Y$:

$$\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\mathrm{Cov}(X, Y).$$

La covarianza é un concetto rilevante: possiamo dimostrare che se essa é uguale a 0, le v.a. X e Y sono indipendenti, ma inoltre quanto più essa é prossima allo 0, tanto meno X e Y dipendono l'una dall'altra. Se poi la covarianza é positiva, esse aumentano o diminuiscono all'unisono, mentre se é negativa, all'aumentare dell'una l'altra tende a diminuire e viceversa. In generale, definiamo a questo scopo un ulteriore coefficiente:

Definizione 39. *Date le v.a. X e Y con deviazioni standard σ_X e σ_Y, si chiama* ***coefficiente di correlazione*** *il numero seguente:*

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

Il problema della correlazione tra v.a. diventa particolarmente importante nell'ambito dell'ottimizzazione di portafoglio a più titoli rischiosi. In sintesi, descritto ogni titolo come v.a. il cui rendimento é rappresentato dalla sua media e il cui rischio é invece misurato dalla sua varianza, nei problemi di scelta di portafoglio dovremo anche descrivere la dipendenza di ogni titolo da ogni altro. Per questo, faremo uso di una matrice quadrata simmetrica sulla cui diagonale avremo le varianze dei singoli titoli e nel posto (i, j) la covarianza tra l'i-esimo ed il j-esimo titolo.

Definizione 40. *Date N v.a. $X_1, \ldots, X_N$, si chiama* ***matrice di covarianza (o delle varianze/covarianze)*** *la matrice*

$$C = (c_{ij}) = (Cov(X_i, X_j)) \in M_N(\mathbb{R}).$$

La matrice delle varianze/covarianze é simmetrica e definitia positiva, vale a dire ha tutti autovalori reali positivi, e come tutte le matrici di questo tipo si può associare ad una forma quadratica definita positiva che, in funzione della quantità dei singoli titoli, esprime la varianza (e quindi quantifica il rischio) dell'intero portafoglio. Un tipico problema di scelta di portafoglio consiste proprio nel determinarne quello di minimo rischio.

2.2.2 Variabili aleatorie continue

Nella teoria delle v.a. continue si ritrovano i concetti già visti per le v.a. discrete, a parte alcune differenze tecniche, che sono le tipiche differenze che intercorrono tra la matematica del discreto e quella del continuo. In particolare, le sommatorie vengono sostituite dagli integrali, le densità sono funzioni continue, e via dicendo.

Definizione 41. *Una funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice una* ***densità (o legge)*** *se valgono le seguenti proprietà:*

1. $f(x) \geq 0 \ \forall \ x \in \mathbb{R}$;
2. $f(x)$ *é integrabile su tutto* $\mathbb{R}$;
3. $$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1.$$

Definizione 42. *Data la v.a. X con funzione di ripartizione $F(x)$, diremo che X ha densità $f(x)$ se F é primitiva di f, ossia:*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt,$$

o, equivalentemente, se

$$P(\{X \leq k\}) = F(k) = \int_{-\infty}^{k} f(t)dt.$$

Di conseguenza, la probabilità che X assuma valori compresi in un dato intervallo $[a, b]$ si ricava semplicemente dalle proprietà degli integrali:

$$P(\{a \leq X \leq b\}) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(t)dt.$$

Esempio 43. *La più semplice tra le densità delle v.a. continue é la cosiddetta distribuzione uniforme, definita dalla funzione:*

$$f(t) = \begin{cases} 1 & se\ t \in (0, 1) \\ 0 & se\ \ t \leq 0 \ \ oppure\ t \geq 1 \end{cases} . \tag{2.2.3}$$

Evidentemente, (2.2.3) verifica tutte le ipotesi della definizione di densità, e in particolare é integrabile anche se discontinua in un numero finito di punti (due).

Quindi, ogni v.a. X distribuita uniformemente é tale che, per ogni a, $b \in [0, 1]$ si ha:

$$P(\{a \leq X \leq b\}) = \int_{a}^{b} dt = b - a.$$

La sua cosiddetta uniformità deriva dal fatto che la probabilità che X prenda valori in un dato intervallo dipende solo dall'ampiezza di quell'intervallo e non da dove esso si trova.

Definizione 44. *Data una v.a. X continua, di densità $f(\cdot)$, si dice che X ha media finita se e solo se*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x)dx < +\infty.$$

Definizione 45. *Se X ha media finita, si chiama* ***media (o valore atteso o speranza matematica)*** *di X il numero:*

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx. \tag{2.2.4}$$

Fondamentalmente, tutte le proprietà della media di una v.a. discreta si ripropongono nella teoria delle v.a. continue, quindi la media di una somma di 2 v.a. é la somma delle medie, e via dicendo. Se poi anche la v.a. $(X - E[X])^2$ ha media finita, possiamo ridefinire anche la varianza, utilizzando la stessa legge $f(x)$:

Definizione 46. *Si chiama* ***varianza*** *della v.a. continua X il seguente integrale:*

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E[X])^2 f(x)dx. \tag{2.2.5}$$

E inoltre, vale anche qui la formula (2.2.2). Più complessa risulta invece la trattazione del prodotto di v.a. e della covarianza, per cui servono gli integrali doppi, e che qui non sarà affrontata.

Esempio 47. *Consideriamo una v.a. continua X distribuita secondo una nuova densità detta* ***densità esponenziale di parametro*** *λ, definita da:*

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & se \;\; t > 0 \\ 0 & altrimenti \end{cases} . \tag{2.2.6}$$

Quindi, possiamo schematizzare la ripartizione di X in questo modo:

$$Pr(\{X \leq k\}) = F(k) = \int_{-\infty}^{k} \lambda e^{-\lambda x} dx = \int_{0}^{k} \lambda e^{-\lambda x} dx.$$

Calcoliamo la media di X, applicando la formula (2.2.4) e usando l'integrazione per parti:

$$E[X] = \lambda \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx = \lambda \left(\left[x \cdot \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} 1 \cdot \left(\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} \right) dx \right) =$$

$$= \lambda \left([0 - 0] - \left[\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda^2} \right]_0^{+\infty} \right) = \frac{1}{\lambda}.$$

Calcoliamo ora la varianza di X, usando la formula (2.2.2), dopo aver ricavato che

$$E[X^2] = \lambda \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx = \lambda \left(\left[\frac{x^2 \cdot e^{-\lambda x}}{-\lambda} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} 2x \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} dx \right) =$$

$$= \lambda \left([0 - 0] + \frac{2}{\lambda} \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx \right) = \lambda \cdot \frac{2}{\lambda^3} = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Applicando (2.2.2), otteniamo:

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

La densità esponenziale é particolarmente indicata nelle applicazioni in cui si deve modellizzare la durata di vita degli organismi biologici, e quindi anche delle persone, o il tempo di affidabilità di lungo periodo nei sistemi meccanici.

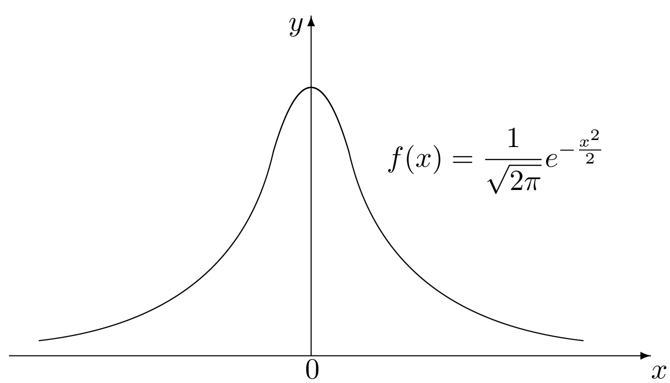
In particolare, in Matematica Attuariale, costruiremo una teoria probabilistica generale per la durata di vita che permetta di valutare i premi, le prestazioni, le riserve tecniche e tutto quanto riguarda i modelli assicurativi.

Infine, dobbiamo ricordare naturalmente la distribuzione più utilizzata e famosa per schematizzare le distribuzioni di ogni genere, di cui si fa larghissimo uso nelle Scienze Sociali, nelle Scienze Naturali, ecc.: la **normale di Gauss** o **Gaussiana**. La Gaussiana ha media μ e varianza σ^2 consiste in una funzione a campana (questa forma si ripropone anche in più variabili):

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Il caso più semplice é la **normale standard** con media nulla e varianza unitaria:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$



Gaussiana ad 1 variabile di media nulla e varianza uguale a 1

Quando una v.a. continua é distribuita normalmente, si usa la notazione rapida: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

2.2.3 Esercizi svolti e proposti

Esercizio 48. ***Alla Festa della Birra della Garbatella si stima che il*** 5% ***dei partecipanti beva 5 birre da 0,40 litri, il*** 20% ***2 birre da 0,40, il*** 45% ***una birra da 0,40, il*** 20% ***una birra da 0,20 e il*** 10%***, che corrisponde ai guidatori delle macchine, non beve nulla. Detta*** X ***la v.a. discreta che descrive la quantità di birra bevuta, calcolare il consumo medio, la varianza e la deviazione standard di*** X***.***

Per cominciare, descriviamo la v.a. con tutte le sue possibili determinazioni, trasformando le percentuali date in probabilità in forma di rapporto:

$$X = \begin{cases} x_1 = 2\ l\,; & p(x_1) = 5\% = \dfrac{1}{20}; \\ x_2 = 0.8\ l\,; & p(x_2) = 20\% = \dfrac{1}{5}; \\ x_3 = 0.4\ l\,; & p(x_3) = 45\% = \dfrac{9}{20}; \\ x_4 = 0.2\ l\,; & p(x_4) = 20\% = \dfrac{1}{5}; \\ x_5 = 0\ l\,; & p(x_5) = 10\% = \dfrac{1}{10}. \end{cases}$$

Il consumo medio risulta dunque:

$$E[X] = 2 \cdot \frac{1}{20} + \frac{8}{10} \cdot \frac{1}{5} + \frac{4}{10} \cdot \frac{9}{20} + \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{5} + 0 \cdot \frac{1}{10} = \frac{12}{25},$$

vale a dire 0.48 litri a persona. Calcoliamo ora la varianza, utilizzando la sua definizione. Bisogna estrapolare tutti gli scarti dei valori presi da X *dal valor medio, quadrarli e farne il valor medio utilizzando la stessa distribuzione di probabilità, quindi la v.a. da considerare sarà (omettiamo l'unità di misura):*

$$(X - E[X])^2 = \begin{cases} y_1 = \left(\dfrac{38}{25}\right)^2; & p(y_1) = 5\% = \dfrac{1}{20}; \\ y_2 = \left(\dfrac{8}{25}\right)^2; & p(y_2) = 20\% = \dfrac{1}{5}; \\ y_3 = \left(-\dfrac{2}{25}\right)^2; & p(y_3) = 45\% = \dfrac{9}{20}; \\ y_4 = \left(-\dfrac{7}{25}\right)^2; & p(y_4) = 20\% = \dfrac{1}{5}; \\ y_5 = \left(-\dfrac{12}{25}\right)^2; & p(y_5) = 10\% = \dfrac{1}{10}. \end{cases}$$

$$Var(X) = \left(\frac{38}{25}\right)^2 \cdot \frac{1}{20} + \left(\frac{8}{25}\right)^2 \cdot \frac{1}{5} + \left(-\frac{2}{25}\right)^2 \cdot \frac{9}{20} + \left(-\frac{7}{25}\right)^2 \cdot \frac{1}{5} + \left(-\frac{12}{25}\right)^2 \cdot \frac{1}{10} =$$

$$= \frac{1}{625}\left(\frac{361}{5} + \frac{64}{5} + \frac{9}{5} + \frac{49}{5} + \frac{72}{5}\right) = \frac{111}{625},$$

ossia, in numero decimale, 0,1776. Infine, la deviazione standard, banalmente risulta:

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{0.1776} = 0,421426.$$

Esercizio 49. ***Data una v.a. distribuita secondo la densità di Poisson con parametro λ, dimostrare che sia la sua media che la sua varianza sono uguali a λ.***

Cominciamo con la media, ricordandone la formula:

$$E[X] = e^{-\lambda}\sum_{K=0}^{\infty} K\frac{\lambda^K}{K!} = e^{-\lambda}\sum_{K=1}^{\infty}\frac{\lambda^K}{(K-1)!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{K=1}^{\infty}\frac{\lambda^{K-1}}{(K-1)!} = \lambda,$$

in quanto l'ultima sommatoria con un cambio di variabile elementare diventa uguale al suddetto sviluppo in serie dell'esponenziale di λ.

Per quanto riguarda la varianza, invece, ci conviene usare la formula (2.2.2), già sapendo che $(E[X])^2 = \lambda^2$. Invece, $E[X^2]$ si calcola nel modo seguente:

$$E[X^2] = e^{-\lambda}\sum_{K=0}^{\infty} K^2\frac{\lambda^K}{K!} = e^{-\lambda}\sum_{K=1}^{\infty} K\frac{\lambda^K}{(K-1)!} = e^{-\lambda}\sum_{K=1}^{\infty}(K-1+1)\frac{\lambda^K}{(K-1)!} =$$

$$= e^{-\lambda}\left(\sum_{K=2}^{\infty}\frac{\lambda^K}{(K-2)!} + \sum_{K=1}^{\infty}\frac{\lambda^K}{(K-1)!}\right) = e^{-\lambda}\left(\lambda^2\sum_{K=2}^{\infty}\frac{\lambda^{K-2}}{(K-2)!} + \right.$$

$$\left. +\lambda\sum_{K=1}^{\infty}\frac{\lambda^{K-1}}{(K-1)!}\right) = e^{-\lambda}(\lambda^2+\lambda)e^{\lambda} = \lambda^2+\lambda,$$

avendo usato 2 volte il metodo precedente. Per concludere, applichiamo (2.2.2):

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

Esercizio 50. ***Data la funzione definita da:***

$$f(t) = \begin{cases} kte^{-t/2} & \textbf{\textit{se}} \quad t \geq 0 \\ 0 & \textbf{\textit{altrimenti}} \end{cases},$$

dire per quale $k \in \mathbb{R}$ essa rappresenta una densità di probabilità e, per tale k, calcolare la media di una v.a. continua distribuita secondo questa legge.

Affinchè $f(t)$ sia una densità, deve essere nonnegativa, e su $t \geq 0$ lo é per ogni $k > 0$ (escludendo il caso identicamente nullo $k = 0$), inoltre il suo integrale deve essere uguale ad 1, vale a dire:

$$\int_0^{+\infty} kte^{-t/2}dt = 1 \iff k\left\{\left[t\frac{e^{-t/2}}{-\frac{1}{2}}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\frac{e^{-t/2}}{-\frac{1}{2}}dt\right\} = 1 \iff$$

$$\iff 2k\left[\frac{e^{-t/2}}{-\frac{1}{2}}\right]_0^{\infty} = (-4k)\cdot(-1) = 1 \iff k = \frac{1}{4}.$$

Calcoliamo ora il valore atteso, dopo aver sostituito il valore di k trovato. Dalla definizione, dovremo risolvere l'integrale:

$$\int_0^{\infty}\frac{t^2}{4}e^{-t/2}dt = \frac{1}{4}\left\{\left[t^2\frac{e^{-t/2}}{-\frac{1}{2}}\right]_0^{+\infty} - 2\int_0^{\infty}\frac{te^{-t/2}}{-\frac{1}{2}}dt\right\} =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot 4\left\{\left[t^2\frac{e^{-t/2}}{-\frac{1}{2}}\right]_0^{+\infty} - 2\int_0^{\infty}\frac{te^{-t/2}}{-\frac{1}{2}}dt\right\} = 4\int_0^{\infty} te^{-t/2}dt =$$

$$= 4\left\{\left[\frac{te^{-t/2}}{-\frac{1}{2}}\right]_0^{+\infty} + 2\int_0^{\infty} e^{-t/2}dt\right\} = 8\left[\frac{e^{-t/2}}{-\frac{1}{2}}\right]_0^{+\infty} = (-16)\cdot(-1) = 16.$$

Altri esercizi proposti:

1. **Data la v.a. discreta X che prende valori $x_1 = 3$ con $p_1 = 1/4$, $x_2 = 2$ con $p_2 = 1/3$, $x_3 = K$ con $p_3 = 5/12$, determinare il valore di K affinchè $E[X] = 0$. Successivamente, fissato quel valore, calcolare $Var(X)$.**

   $[K = -17/5;\ Var(X) = 42/5]$

2. **Stabilire per quale k la funzione $f(x) = \dfrac{k}{(x+1)^3}$, definita su $[0, +\infty)$, è una densità di probabilità.**

   $[k = 2]$

3. **Calcolare valore atteso e varianza di una v.a. continua X distribuita secondo la densità $f(x) = e^{-|x|}$, definita su tutto $\mathbb{R}$.**

   $[E[X] = 0;\ Var(X) = 4]$

Capitolo 3

Strumenti di Matematica Attuariale

In questo Capitolo, introduciamo la notazione e i concetti base della Matematica Attuariale (per approfondimenti e ulteriore spiegazione, si consigliano: prima di tutto i Capitoli dall'8 al 12 dell'eccellente testo di Allevi *et al.* [ABRZ], inoltre le dispense [S], Capitolo 2, oppure una qualsiasi edizione del libro di Slud [SL]). Cominciamo con la nozione di *funzione di sopravvivenza*, che si può facilmente definire partendo da una variabile aleatoria continua T che indica l'istante della morte di un individuo (si dice anche tradizionalmente 'una **testa**).

3.1 Funzioni di sopravvivenza e modellizzazione della durata di vita

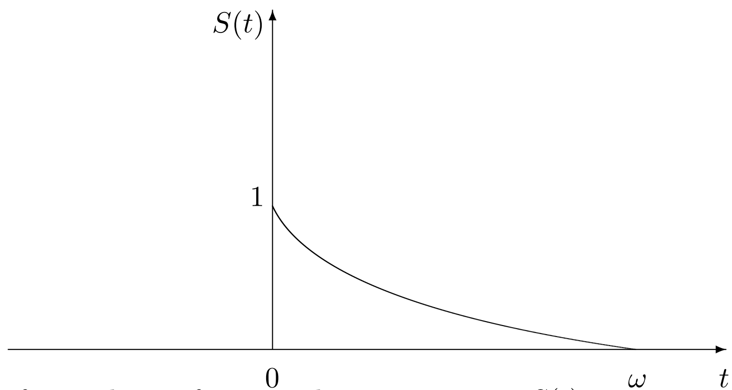
Definizione 51. *Considerando una variabile aleatoria continua di durata di vita (o alternativamente, di tempo di morte) T, e la sua funzione di ripartizione $F(t) = Pr(\{T \leq t\})$, si chiama* ***funzione di sopravvivenza*** *$S(t)$ la sua complementare:*

$$S(t) = 1 - F(t) = Pr(\{T > t\}).$$

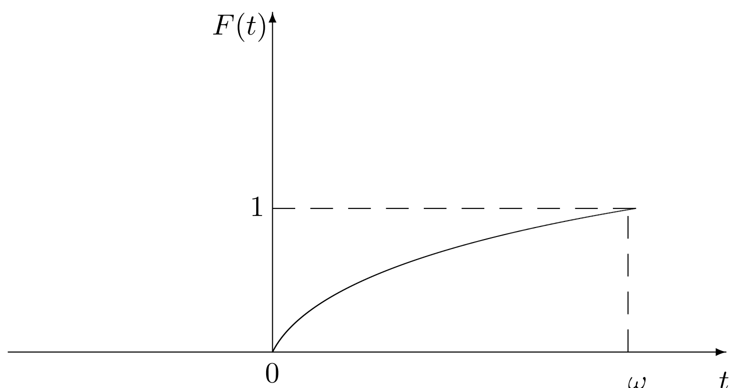
Possiamo già fissare alcuni concetti intuitivi sulle funzioni $F(t)$ ed $S(t)$, per caratterizzarle meglio:

- $S(0) = 1$, perchè la probabilità di sopravvivere dopo la nascita è 1, e $S(T) = Pr(\{T > T\}) = 0$, perchè la probabilità di sopravvivere dopo la morte è 0.

- $F(0) = 0$, perchè la probabilità di morire prima del tempo iniziale 0 è 0, e $F(T) = 1$, perchè la probabilità di morire prima del tempo T, che rappresenta la durata di vita, è 1.
- Considerando un qualsiasi istante di tempo $\omega \geq T$, avremo che $S(\omega) = 0$, $F(\omega) = 1$.



La tipica forma di una funzione di sopravvivenza $S(t)$



La funzione di ripartizione $F(t)$ associata a $S(t)$

Nelle figure precedenti, un esempio di $S(t)$ e la corrispondente $F(t)$. Intuitivamente, si può pensare a un'esponenziale negativa, qundi decrescente e convessa. Va notato che la lettera ω, anche detta **età estrema**, si usa come massima durata di vita nelle tavole di mortalità. In teoria, si può anche considerare $\omega = +\infty$.

Dalla precedente Definizione, si possono derivare una serie di ulteriori quantità che possono essere utili nell'analisi di sopravvivenza, ad esempio la probabilità che un individuo sia ancora in vita alla data $t_1 + t_2$, sotto l'ipotesi che abbia vissuto fino al tempo t_1. Questa è chiaramente una probabilità condizionata, in cui l'evento condizionante è quello di essere sopravvissuto fino a t_1. Avremo la seguente:

Definizione 52. *La **probabilità di morte entro il tempo** $t_1 + t_2$ é data da:*

$$Pr(\{T \leq t_1 + t_2 \mid T > t_1\}) = \frac{Pr(\{t_1 < T \leq t_1 + t_2\})}{Pr(\{T > t_1\})} = \frac{S(t_1) - S(t_1 + t_2)}{S(t_1)}. \tag{3.1.1}$$

Naturalmente al numeratore la quantità $S(t_1) - S(t_1 + t_2)$ è positiva perchè $S(t)$ è una funzione decrescente nel tempo. In generale, dati due tempi t' e t'', la probabilità che la morte avvenga tra queste due date è data da:

$$S(t') - S(t'') = 1 - F(t') - (1 - F(t'')) = F(t'') - F(t').$$

Quindi, analogamente, la relazione (3.1.1) si può esprimere anche con la $F(t)$:

$$\frac{S(t_1) - S(t_1 + t_2)}{S(t_1)} = \frac{F(t_1 + t_2) - F(t_1)}{1 - F(t_1)} =_{t_2|} q_{t_1}. \tag{3.1.2}$$

Il simbolo $_{t_2|}q_{t_1}$ appartiene alla notazione attuariale standard, e rappresenta la probabilità che un individuo, essendo sopravvissuto fino al tempo t_1, rimanga in vita ancora fino al tempo $t_1 + t_2$.

Definizione 53. *La **probabilità di sopravvivenza oltre il tempo** $t_1 + t_2$, sotto l'ipotesi condizionale che abbia vissuto fino al tempo t_1, è data da:*

$$Pr(\{T > t_1 + t_2 \mid T > t_1\}) = \frac{Pr(\{T > t_1 + t_2\})}{Pr(\{T > t_1\})} = \frac{S(t_1 + t_2)}{S(t_1)}. \tag{3.1.3}$$

Analogamente:

$$Pr(\{T > t_1 + t_2 \mid T > t_1\}) = \frac{1 - F(t_1 + t_2)}{1 - F(t_1)} =_{t_2|} p_{t_1}. \tag{3.1.4}$$

Quest'altro simbolo attuariale, $_{t_2|}p_{t_1}$, rappresenta la probabilità che una testa, essendo sopravvissuto fino al tempo t_1, resti in vita oltre il tempo $t_1 + t_2$, e si può anche definire *funzione di sopravvivenza condizionata.* Risulta facile dimostrare che le due probabilità sono l'una complementare dell'altra. infatti:

$$_{t_2|}q_{t_1} +_{t_2|} p_{t_1} = \frac{S(t_1) - S(t_1 + t_2)}{S(t_1)} + \frac{S(t_1 + t_2)}{S(t_1)} = \frac{S(t_1)}{S(t_1)} = 1.$$

Un caso importante e particolare per questi due simboli capita quando si considera $t_2 = 1$, e in questo caso vengono abbreviati con q_{t_1} e p_{t_1}:

- $q_{t_1} = \dfrac{S(t_1) - S(t_1+1)}{S(t_1)}$ è la probabilità che una testa in vita al tempo t_1 muoia entro un anno.
- $p_{t_1} = \dfrac{S(t_1+1)}{S(t_1)}$ è la probabilità che una testa in vita al tempo t_1 sia ancora in vita per un anno.

Va notata un'altra importante relazione, che suggerisce un modo alternativo di scrivere una funzione di sopravvivenza: poichè $S(0) = 1$, si ha:

$$_{t|}p_0 = \frac{S(0+t)}{S(0)} = S(t).$$

Analogamente:

$$_{t|}q_0 = 1 -_{t|} p_0 = 1 - S(t) = F(t).$$

Da ricordare anche un'importante ulteriore proprietà della probabilità di sopravvivenza $_{t_2}p_{t_1}$, particolarmente comprensibile se t_2 è un numero intero, dovuta al *principio delle probabilità composte*:

$$_{t_2}p_{t_1} = p_{t_1} \cdot p_{t_1+1} \cdot \dots \cdot p_{t_1+t_2-1}.$$

Nella prossima sezione, torneremo su tutta la simbologia attuariale standard.

Tornando a $S(t)$ e ad $F(t)$, essendoci una funzione di ripartizione, c'è anche la densità di probabilità della v.a. T, ossia la sua derivata. Chiamandola al solito $f(t)$, e intendendo che sul semiasse negativo dei tempi sia identicamente nulla, scriviamo la relazione tra densità e funzione di ripartizione:

$$F(t) = Pr(\{T \le t\}) = \int_0^t f(s)ds. \tag{3.1.5}$$

Di conseguenza, possiamo usare anche gli integrali per calcolare la probabilità che una testa viva per un periodo compreso tra due diversi istanti di tempo. Se $t' < t''$, si ha:

$$F(t'') - F(t') = \int_0^{t''} f(s)ds - \int_0^{t'} f(s)ds = \int_{t'}^{t''} f(s)ds.$$

Poiché T è una v.a. continua con densità $f(t)$, si possono agevolmente calcolarne media (ossia durata attesa di vita) e varianza. Avremo:

- **durata attesa di vita:**

$$E[T] = \int_0^\infty tf(t)dt;$$

- **varianza:**

$$Var(T) = \int_0^\infty t^2 f(t)dt - \left(\int_0^\infty t f(t)dt \right)^2.$$

Il valore atteso della durata di vita, condizionato al fatto che l'individuo abbia già vissuto fino al tempo t_1, va considerato come l'integrale di media diviso per la probabilità che la vita sia già durata il tempo t_1, quindi per la funzione di sopravvivenza in t_1, e la variabile nella densità va inoltre traslata del tempo già trascorso. Usando il simbolo $E_{t_1}[\cdot]$, avremo la seguente formula:

Definizione 54. *Si chiama* ***durata attesa di vita dal tempo*** t_1 ***in avanti*** *l'integrale:*

$$E_{t_1}[T] = \frac{1}{S(t_1)} \int_0^\infty t f(t + t_1)dt. \tag{3.1.6}$$

Un'ulteriore importante concetto è l'analogo dell'intensità istantanea di interesse (in Matematica Finanziaria, data una legge di capitalizzazione $r(t)$ derivabile, si tratta di $\delta(t) = r'(t)/r(t)$), ossia l'**intensità istantanea di mortalità** (o **forza di mortalità**): una funzione del tempo che chiameremo, in notazione standard, $\mu(t)$. Riprendendo l'espressione (3.1.2) e rendendo infinitesima la quantità t_2, essa è data dal seguente limite, valido per tutti i valori di $t_1 \geq 0$:

$$\mu(t) = \lim_{t_2 \to 0} \frac{Pr(\{T \leq t_1 + t_2 \mid T > t_1\})}{t_2} = \lim_{t_2 \to 0} \frac{S(t_1) - S(t_1 + t_2)}{t_2 S(t_1)} =$$

$$= -\frac{1}{S(t_1)} \lim_{t_2 \to 0} \frac{S(t_1 + t_2) - S(t_1)}{t_2} = -\frac{S'(t_1)}{S(t_1)}. \tag{3.1.7}$$

Alternativamente, si può scrivere che la forza di mortalità $\mu(t)$ è legata alla funzione di sopravvivenza $S(t)$ dall'equazione differenziale di primo ordine:

$$\mu(t) = -\frac{d}{dt} \log(S(t)), \tag{3.1.8}$$

con condizione iniziale $S(0) = 1$.

Esempio 55. *La funzione di sopravvivenza di Poisson $S(t) = e^{-\lambda t}$, di parametro $\lambda > 0$, è associata ad una forza di mortalità costante e uguale a λ. Infatti:*

$$\mu(t) = -\frac{(-\lambda)e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda.$$

Inoltre, possiamo notare che la funzione di sopravvivenza condizionata in questo caso risulta:

$${}_{t_2|}p_{t_1} = \frac{S(t_1 + t_2)}{S(t_1)} = \frac{e^{-\lambda(t_1+t_2)}}{e^{-\lambda t_1}} = e^{-\lambda t_2} = \frac{S(0 + t_2)}{S(0)} = {}_{t_2|}\, p_0.$$

Generalizzando, quindi, quando abbiamo una $S(t)$ di Poisson, ${}_{t|}p_\tau = {}_{t|}\, p_0$ per ogni t e per ogni τ.

3.1.1 Principali funzioni di sopravvivenza

Oltre alla funzione di Poisson citata precedentemente, che è l'unica a corrispondere a una forza di mortalità costante, abbiamo alcune altre funzioni di sopravvivenza variamente usate nell'ambito attuariale, che schematizziamo brevemente. Tipicamente, esse dipendono da uno o più parametri significativi. Per ricavarne le singole espressioni, si può anche partire dalle forze di mortalità associate.

1. **Funzione di sopravvivenza di Gompertz**: consideriamo una forza di mortalità del tipo
$$\mu(t) = \beta c^t, \tag{3.1.9}$$
i cui parametri sono due numeri reali $\beta > 0$ e $c > 1$. Risolvendo l'equazione differenziale (3.1.8) otteniamo:
$$\frac{S'(t)}{S(t)} = -\beta c^t \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{dS}{S} = -\beta c^t dt,$$
da cui, integrando entrambi i membri nella propria variabile e imponendo la condizione al contorno $S(0) = 1$, si ha:
$$\ln\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right) = -\frac{\beta}{\ln c}(c^t - 1) \qquad \Longleftrightarrow \qquad S(t) = e^{\frac{\beta}{\ln c}(1-c^t)} = e^{\frac{\beta}{\theta}(1-e^{\theta t})},$$
avendo rinominato $\theta = \ln c$. Va ovviamente ricordato che $S(t)$ si può pure esprimere nelle altre due notazioni attuariali-biometriche (in particolare, la notazione biometrica verrà introdotta nella Sezione 3.2): $S(t) =_{t|} p_0 = \dfrac{l_t}{l_0}$.

2. **Funzione di sopravvivenza di Makeham**: Questa volta 'estendiamo' la forza di mortalità di Gompertz con un termine con un termine additivo costante e positivo, ossia:
$$\mu(t) = \alpha + \beta c^t, \tag{3.1.10}$$
con $\alpha > 0$. Ricaviamo la funzione di sopravvivenza relativa come sopra:
$$\frac{S'(t)}{S(t)} = -\alpha - \beta c^t \qquad \Longleftrightarrow \cdots \Longleftrightarrow \qquad S(t) =_{t|} p_0 = e^{-\alpha t + \frac{\beta}{\ln c}(1-c^t)}.$$
Talvolta, la legge di Makeham si scrive considerando:
$$l_t = l_0 e^{\frac{\beta}{\ln c}} e^{-\alpha t - \frac{\beta}{\ln c} c^t} = K S^t g^{c^t},$$
avendo posto $K = l_0 e^{\frac{\beta}{\ln c}}$, $S = e^{-\alpha}$, $G = e^{-\frac{\beta}{\ln c}}$ (vedi [ABRZ], 9.3.4.). Qui l_0 corrisponde alla numerosità iniziale della popolazione considerata. Notare che se $\alpha = 0$, $S = 1$ e l'espressione precedente diventa la legge di Gompertz $l_t = K g^{c^t}$.

3. **Funzione di sopravvivenza di De Moivre**: è una delle più antiche e delle più semplici, infatti risale al 18-esimo secolo. In questo caso, consideriamo la forza di mortalità
$$\mu(t) = \frac{1}{\omega - t}, \tag{3.1.11}$$
con $\omega > 0$ che ha il consueto significato di età massima raggiungibile, ma non raggiunta, quindi il dominio di μ è $[0, \omega)$. La funzione di sopravvivenza di De Moivre si determina dalla seguente integrazione membro a membro:
$$\frac{S'(t)}{S(t)} = -\frac{1}{t - \omega} \iff \frac{dS}{S} = -\frac{dt}{\omega - t} \iff$$
$$\iff \ln\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right) = \ln\left(\frac{\omega - t}{\omega}\right) \iff S(t) = 1 - \frac{t}{\omega} =_{t|} p_0,$$
quindi in pratica un segmento di retta decrescente che parte da 1 e interseca l'asse dei tempi in $t = \omega$.

Un'ulteriore funzione di sopravvivenza, quella di Weibull, sarà introdotta in uno dei prossimi esercizi.

3.1.2 Esercizi svolti e proposti

Esercizio 56. ***Data la funzione di sopravvivenza*** $S(t) = \left(1 - \frac{t}{100}\right)^{\frac{4}{5}}$***, definita sul dominio*** $t \in [0, 100]$***, calcolare:***
a) la probabilità che un neonato superi i 10 ***anni di età;***
b) la probabilità che un neonato muoia tra i 40 ***e i*** 50 ***anni di età.***

Chiamiamo T la v.a. che esprime la durata di vita di un neonato. Per quanto riguarda il punto a), ci basta ricordare la definizione di funzione di sopravvivenza:
$$S(10) = Pr(\{T > 10\}) = \left(1 - \frac{10}{100}\right)^{\frac{4}{5}} = (0.9)^{0.8} = 0.919.$$
Al punto b), ricordiamo che, detta $f(t)$ è la densità di probabilità di T, la probabilità richiesta è:
$$Pr(\{40 < T < 50\}) = \int_{40}^{50} f(t)dt.$$
Trovare $f(t)$ risulta semplice, perché è la derivata di $F(t)$. Poichè
$$F(t) = 1 - S(t) = 1 - \left(1 - \frac{t}{100}\right)^{\frac{4}{5}},$$

di conseguenza

$$f(t) = F'(t) = \frac{4}{5 \cdot 100}\left(1 - \frac{t}{100}\right)^{-\frac{1}{5}},$$

quindi avremo:

$$Pr(\{40 < T < 50\}) = \frac{1}{125}\int_{40}^{50}\left(1 - \frac{t}{100}\right)^{-\frac{1}{5}} dt = \frac{1}{125}\left[\frac{(-100)\left(1 - \frac{t}{100}\right)^{\frac{4}{5}}}{\frac{4}{5}}\right]_{40}^{50} =$$

$$= -\left[(1 - 1/2)^{0.8} - (1 - 2/5)^{0.8}\right] = -0.574 + 0.664 = 0.09.$$

Alternativamente, potevamo pure calcolare:

$$S(40) - S(50) = (1 - 40/100)^{0.8} - (1 - 50/100)^{0.8} = 0.09.$$

Esercizio 57. ***Data la forza di mortalità di Weibull*** $\mu(t) = \beta\alpha^{-\beta}t^{\beta-1}$***, con*** α ***e*** β ***reali positivi:***

a) determinare la funzione di sopravvivenza relativa;

b) fissato $\beta = 2$***, stabilire per quali valori di*** α ***si ha*** $S(1) = e^{-2}$***.***

Al punto a), per ricavare la funzione $S(t)$*, bisogna considerare l'equazione differenziale associata:*

$$\mu(t) = -\frac{S'(t)}{S(t)} \iff \beta\alpha^{-\beta}t^{\beta-1} = -\frac{S'(t)}{S(t)} \iff S'(t) = -\beta\alpha^{-\beta}t^{\beta-1}S(t),$$

che si può facilmente risolvere tramite separazione delle variabili:

$$\frac{dS}{S} = -\beta\alpha^{-\beta}t^{\beta-1}dt \iff \ln\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right) = -\beta\alpha^{-\beta}\frac{t^{\beta}}{\beta} \iff \cdots \iff S(t) = e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta}}.$$

Punto b): fissiamo $\beta = 2$ *nella funzione* $S(t)$ *appena ricavata, e otteniamo:*

$$S(t) = e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{2}}.$$

Imponendo la condizione $S(1) = e^{-2}$*, si ha:*

$$S(1) = e^{-\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{2}} = e^{-2} \iff \frac{1}{\alpha^2} = 2 \iff \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

avendo scartato la radice negativa in quanto $\alpha > 0$.

Esercizio 58. ***Data la funzione di sopravvivenza di De Moivre con età massima*** 105 ***anni:*** $S(t) = 1 - \frac{t}{105}$***, definita sul dominio*** $t \in [0, 105]$***, calcolare:***

a) la probabilità che un neonato superi i 7 ***anni di età;***

b) la probabilità che una testa muoia tra i 50 ***e i*** 70 ***anni di età;***

c) la durata attesa di vita di una testa dal tempo $t_1 = 0$ ***in poi.***

Per quanto riguarda il punto a), valutiamo semplicemente la $S(t)$ *al tempo* $t = 7$*:*

$$S(7) = 1 - \frac{7}{105} = \frac{98}{105} = 0.9\overline{3}.$$

Per i punti b) e c), ricaviamo le funzioni $F(t)$ *ed* $f(t)$ *dalla funzione di sopravvivenza:*

$$F(t) = 1 - S(t) = 1 - \left(1 - \frac{t}{105}\right) = \frac{t}{105} \qquad \Longrightarrow \qquad f(t) = F'(t) = \frac{1}{105}.$$

Ora, calcoliamo l'integrale che esprime la probabilità di sopravvivenza tra i tempi 50 *e* 70*:*

$$Pr(50 < T < 70) = \int_{50}^{70} \frac{dt}{105} = \frac{70 - 50}{105} = 0.19.$$

Infine, calcoliamo la durata attesa di vita applicando la formula (3.1.6):

$$E_0[T] = \frac{1}{S(0)} \int_0^{105} \frac{t}{105} dt = \frac{105^2 - 0^2}{2 \cdot 105} = 52.5 \text{ anni.}$$

Notare che saremmo pervenuti allo stesso risultato applicando la:

$$e_0 = E_0[T] = \int_0^{\infty} \frac{S(0+t)}{S(0)} dt = \int_0^{105} \left(1 - \frac{t}{105}\right) dt = \left[t - \frac{t^2}{2 \cdot 105}\right]_0^{105} =$$

$$= 105 - \frac{105^2}{2 \cdot 105} - 0 - \frac{0^2}{2 \cdot 105} = \frac{105}{2} = 52.5 \text{ anni.}$$

Altri esercizi proposti:

1. **Data una funzione di sopravvivenza di De Moivre** $S(t) = 1 - \frac{t}{\omega}$**, definita per** $t \in [0, \omega]$**, calcolare il valore di** ω **tale che la durata attesa di vita** T **a partire dall'istante** 0 **sia uguale a** 53 **anni. Successivamente, calcolare** $Var(T)$**.**

   $[\omega = 106;\ Var(T) = 936.\overline{3}]$

2. **Data una funzione di sopravvivenza di Makeham, con parametri $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.02$, $c = 1.04$, calcolare la probabilità che una testa superi i 30 anni di età.**

   [1.58%]

3. **Data una legge di mortalità di Gompertz il cui parametro c è uguale a 1.05, calcolare il valore di β affinchè la probabilità che una testa superi i 50 anni sia 0.09; successivamente, calcolare la forza di mortalità a 50 anni.**

   [0.01122; 0.12866]

3.2 Funzioni biometriche e tavole di mortalità

Abbiamo già introdotto alcuni simboli chiave per la notazione attuariale. prima di procedere con gli altri, dobbiamo premettere di avere bisogno di informazioni sulla mortalità e sulla sopravvivenza della popolazione.

Supponiamo di riferirci a una qualsiasi tavola di mortalità, cioè a una tabella in cui, coorte per coorte oppure anno per anno, vengono specificati tutti i dati relativi alla mortalità della popolazione. Per quanto riguarda l'Italia, le tavole di mortalità sono pubblicate dall'Istituto Nazionale di Statistica (ISTAT) sul sito $http://demo.istat.it/tvm2016/index.php?lingua = ita$ ([TMI]). E' consigliato andare a guardarne qualcuna per farsi un'idea. Sono suddivise per anni, area geografica, regione, provincia, ecc. Le 7 colonne corrispondono a 7 diverse informazioni sulla coorte presa in esame: la prima è l'età, mentre le altre sono dette **funzioni biometriche**: numero di individui sopravviventi, numero di decessi, probabilità di morte, anni vissuti, probabilità prospettive di sopravvivenza, speranza di vita residua. Schematizziamo in questa lista la notazione delle funzioni biometriche nelle tavole ISTAT (non tutte le tavole di mortalità contengono sempre esattamente gli stessi elementi). Notare che la variabile temporale principale sarà x piuttosto che t, usata in precedenza.

- x è l'**età** della singola coorte. Nel caso delle tavole ISTAT, ogni coorte raccoglie la popolazione nell'arco di 5 anni (la prima da 0 a 4, la seconda da 5 a 9 eccetera);

- l_x è il **numero dei sopravviventi**, ossia il numero di persone che, partendo da una popolazione iniziale fittizia (in generale, si prende come numerosità iniziale $l_0 = 100.000$ individui), sopravvivono ai vari compleanni compresi tra gli estremi del range della coorte;

- d_x è il **numero dei decessi**, ossia il numero di persone decedute tra l'x-esimo e l'$(x+1)$-esimo compleanno;
- q_x è, come già visto, la **probabilità di morte** entro un anno;
- P_x è la **probabilità prospettiva di sopravvivenza**, cioè la probabilità che una testa di età x viva un altro anno;
- L_x è il **numero di anni vissuti**, che esprime il numero di individui in età x, come anni compiuti;
- e_x è la **speranza di vita**, che è il numero medio di anni ancora da vivere per una testa di età x.

Per rendere più comprensibili queste definizioni, vediamo come queste quantità interagiscono nelle varie formule. Ad esempio, la quantità l_x si determina con la seguente relazione di ricorrenza:

$$l_{x+1} = l_x(1 - q_x) = l_x p_x.$$

Analogamente:

$$l_{x+t} = l_x(1 -_t q_x) =_{t|} p_x l_x.$$

Invece d_x si calcola come segue:

$$d_x = l_x - l_{x+1} = l_x q_x.$$

Il numero di anni vissuti L_x è dato da:

$$L_x = \frac{l_x + l_{x+1}}{2}.$$

La probabilità prospettiva di sopravvivenza, da non confondere con p_x, è data da:

$$P_x = \frac{L_{x+1}}{L_x}.$$

Infine, la speranza di vita è:

$$e_x = \frac{L_x + L_{x+1} + \cdots + L_{\omega-1}}{l_x}.$$

In questa formula, ancora una volta, ω è considerata l'ultima età possibile nella tavola di mortalità. Inoltre, questa formula è chiaramente collegata alla (3.1.6). Prendendo infatti $t_1 = x$ e sfruttando l'uguaglianza $F'(t) = -S'(t)$, avremo:

$$e_x = E_x[T] = \frac{1}{S(x)} \int_0^\infty t f(t+x) dt = \frac{1}{S(x)} \int_0^\infty t F'(t+x) dt =$$

$$= -\frac{1}{S(x)} \int_0^\infty tS'(x+t)dt = -\frac{1}{S(x)} \left\{ [tS(x+t)]_0^\infty - \int_0^\infty S(x+t)dt \right\} =$$

$$= \int_0^\infty \frac{S(x+t)}{S(x)} dt.$$

Qui di seguito schematizziamo un esempio (ridotto) di tavola di mortalità, presa dal sito ISTAT, che rappresenta la popolazione nella provincia di Macerata nell'anno 2015, comprensiva di maschi e femmine (ultimo anno con i dati disponibili).

x	l_x	d_x	q_x	L_x	P_x	e_x
$0-4$	100000	518	0.005178	497718	0.9989816	82.904
$5-9$	99482	80	0.000805	497212	0.9992041	78.330
$10-14$	99402	82	0.000829	496816	0.9987554	73.391
$15-19$	99320	172	0.001735	496198	0.9980646	68.450
$20-24$	99147	202	0.002034	495237	0.9980804	63.564
$25-29$	98946	176	0.001774	494287	0.9980908	58.689
$30-34$	98770	210	0.002121	493343	0.9977030	53.789
$35-39$	98560	251	0.002543	492210	0.9966925	48.898
$40-44$	98310	426	0.004334	490582	0.9938563	44.015
$45-49$	97884	791	0.008082	487568	0.9910271	39.195
$50-54$	97093	966	0.009952	483193	0.9865245	34.493
$55-59$	96126	1707	0.017752	476682	0.9781485	29.813
$60-64$	94420	2504	0.026523	466265	0.9655403	25.303
$65-69$	91915	4025	0.043785	450198	0.9458483	20.920
$70-74$	87891	5928	0.067441	425819	0.9056637	16.756
$75-79$	81963	10587	0.129169	385649	0.8194621	12.772
$80-84$	71376	17449	0.244469	316025	0.6766405	9.264
$85-89$	53927	22725	0.421404	213835	0.4703392	6.401
$90-94$	31202	20550	0.658606	100575	0.2694081	4.209
$95-99$	10652	8771	0.823445	27096	0.1298068	2.888
$100-104$	1881	1767	0.939745	3517	0.0427067	1.951
$105-109$	113	112	0.987564	150	0.0090329	1.338
$110-114$	1	1	0.9985	1	0.0011678	0.964
$115-119$	0	0	0.999884	0	0.0000980	0.750

Esistono anche tavole in cui si indicano i singoli anni anziché le coorti, e tavole in cui ci sono soltanto le colonne x, l_x e d_x, cioè le più significative. Sulla base di questa tavola, supponiamo ad esempio di voler calcolare la probabilità che una qualsiasi testa viva nella coorte $45-49$ sopravviva fino alla coorte $50-55$. Dalla formula descritta in precedenza, considerando come x la coorte $45-49$, si ha:

$$l_{x+1} = l_x p_x \quad \Longleftrightarrow \quad p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} = \frac{97093}{97884} = 0.991919.$$

Allo stesso risultato, salvo approssimazioni, si poteva giungere considerando q_x nella riga corrispondente alla coorte $45-49$:

$$p_x = 1 - q_x = 1 - 0.008082 = 0.991918.$$

Da notare che si possono ricavare anche altri due elementi relativi alla coorte $45-49$, cioè L_x e P_x con le relazioni di cui sopra:

$$L_{45-49} = \frac{l_{45-49} + l_{50-54}}{2} = \frac{97884 + 97093}{2} = 97488.5.$$

Invece,

$$L_{50-54} = \frac{l_{50-54} + l_{55-59}}{2} = \frac{97093 + 96126}{2} = 96609.5.$$

Quindi la probabilità prospettiva di sopravvivenza per la coorte $45-49$ è data da:

$$P_x = \frac{L_{x+1}}{L_x} \quad \Longleftrightarrow \quad P_{45-49} = \frac{L_{50-54}}{L_{45-49}} = \frac{96609.5}{97488.5} = 0.990983.$$

Se invece volessimo calcolare la probabilità che una testa nella coorte $45-49$ sopravviva fino alla fascia di età $70-74$ dobbiamo applicare la formula seguente (con x sempre uguale a $45-49$ e $t = 25$, cioè gli anni ulteriori di vita):

$$l_{x+t} = l_x(1 - {}_tq_x) = {}_t\, p_x l_x \quad \Longleftrightarrow \quad {}_{t|}p_x = \frac{l_{x+t}}{l_x} \quad \Longleftrightarrow \quad {}_{25|}p_{40-45} = \frac{87891}{97884} = 0.897909.$$

3.2.1 Esercizi svolti e proposti

Esercizio 59. ***Data la funzione di sopravvivenza*** $S(t) = \dfrac{\sqrt{100-t}}{10}$***, definita per*** $t \in [0, 100]$***:***

a) ricavare la funzione forza di mortalità $\mu(t)$***;***

b) stabilire a quale istante di tempo t^* ***vale*** $\mu(t^*) = 1/50$***;***

c) calcolare ${}_{8|}p_{35}$ ***e*** ${}_{8|}q_{35}$***.***

Risolviamo il punto a) semplicemente usando la definizione di forza di mortalità (3.1.7):

$$\mu(t) = -\frac{-\dfrac{1}{10} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{100-t}}}{\dfrac{\sqrt{100-t}}{10}} = \frac{1}{200-2t},$$

che è definita sul dominio $t \in [0, 100)$, stesso dominio in cui $S(t)$ è derivabile.

Passando al punto b), è sufficiente risolvere l'equazione:

$$\mu(t^*) = \frac{1}{50} \iff \frac{1}{200 - 2t^*} = \frac{1}{50} \iff 200 - 2t^* = 50 \iff t^* = 75 \textit{ anni.}$$

Per quanto riguarda invece c), ricordiamo che

$$_{t_2|}p_{t_1} = \frac{S(t_1 + t_2)}{S(t_1)} \iff {}_{8|}p_{35} = \frac{S(43)}{S(35)} = \frac{\sqrt{57}}{\sqrt{65}} = 0.936.$$

Troviamo infine $_{8|}q_{35}$ per differenza:

$$_{8|}q_{35} = 1 -_{8|} p_{35} = 1 - 0.936 = 0.064.$$

Esercizio 60. ***Data la seguente tavola di mortalità ridotta (dati ISTAT Toscana* 1977*):***

x	l_x	d_x	q_x
$0-4$	100000	1838	0.018383
$5-9$	98162	140	0.001422
$10-14$	98022	142	0.001452
$15-19$	97880	269	0.002744
$20-24$	97611	320	0.003278
$25-29$	97291	321	0.003296
$30-34$	96970	364	0.003752
$35-39$	96606	585	0.006069
$40-44$	96020	974	0.010139

e considerando la coorte* $20-24$*, determinare:

a) la probabilità che una testa di questa coorte sopravviva fino alla coorte successiva;

b) la probabilità che una testa di questa coorte sopravviva fino alla coorte* $40-44$*;

c) il tasso di mortalità per una testa in vita nella coorte* $40-44$*;

d) la probabilità prospettiva di sopravvivenza per ua testa della coorte* $25-29$*.

Cominciamo dal punto a). Come sappiamo, la probabilità p_{20-24} corrisponderà al rapporto tra le numerosità successiva e corrente della coorte, ossia:

$$p_{20-24} = \frac{l_{25-29}}{l_{20-24}} = \frac{97291}{97611} = 0.996721.$$

Invece, al punto b), dobbiamo considerare $t = 20$ *e applicare la seguente:*

$$_{20|}p_{20-24} = \frac{l_{40-44}}{l_{20-24}} = \frac{96020}{97611} = 0.9837.$$

La determinazione del tasso di mortalità per una testa nella coorte $40-44$ *(punto c)) richiede l'applicazione del rapporto:*

$$q_{40-44} = \frac{d_{40-44}}{l_{40-44}} = \frac{974}{96020} = 0.0101.$$

Infine, per la probabilità prospettiva di sopravvivenza della coorte $25-29$ *abbiamo bisogno dei numeri di anni vissuti relativi a quella stessa coorte e a quella successiva, che otteniamo come medie delle numerosità sui* 2 *periodi (corrente e successivo), ossia:*

$$L_{25-29} = \frac{l_{25-29} + l_{30-34}}{2} = \frac{97291 + 96970}{2} = 97130.5,$$

$$L_{30-34} = \frac{l_{30-34} + l_{35-39}}{2} = \frac{96970 + 96606}{2} = 96788.$$

Dividendo, si ha:

$$P_{25-29} = \frac{L_{30-34}}{L_{25-29}} = \frac{96788}{97130.5} = 0.996473.$$

Altri esercizi proposti:

1. **Data la funzione di sopravvivenza di Poisson $S(t) = e^{-\frac{t}{300}}$, determinare la probabilità che un neonato superi i 18 anni di età e la probabilità che un neonato muoia tra i 50 e i 60 anni di età.**

   [0.941; 0.028]

2. **Data la forza di mortalità costante $\mu = 0.004$, ricavare la funzione di sopravvivenza, e calcolare $_{10|}p_{30}$ e $_{7|}q_{21}$.**

   [$S(t) = e^{-0.004t}$; 0.96; 0.027]

3. **Data la famiglia di funzioni $S_\alpha(t) = \dfrac{(243 - 2t)^{1/5}}{\alpha + 1}$, stabilire il valore di α per cui S_α è una funzione di sopravvivenza. Successivamente, fissato quel valore di α, calcolare $_{10|}p_{50}$ e $_{5|}q_{80}$.**

   [$\alpha = 2$; 0.97; 0.007]

Capitolo 4

Teoria delle assicurazioni

Gli strumenti matematici descritti in precedenza servono a trattare i modelli e i problemi della Matematica Attuariale che, ricordiamolo, è la branca che si occupa principalmente della gestione dell'attività assicurativa e previdenziale. Per sua natura, quindi, è specificamente incentrata sulla gestione del rischio. A differenza della Matematica Finanziaria, che tratta sia fenomeni deterministici che stocastici, la Matematica Attuariale è praticamente soltanto basata sulle variabili aleatorie e su modelli e processi stocastici.

In questo Capitolo riassumiamo finalmente i concetti principali di teoria delle assicurazioni, in particolare sul ramo vita. Prima di addentrarci nei concetti principali, ricordiamo brevemente l'enorme rilevanza assunta negli ultimi anni dalle assicurazioni di vario tipo, in Italia e non solo (basi pensare all'obbligatorietà della polizza RC auto, ma anche delle assicurazioni per alcune categorie professionali a rischio come i medici, ecc.). Naturalmente, anche grazie a questo, le compagnie assicurative e gli altri istituti finanziari che svolgono anche funzioni assicurative sono costantemente in cerca di personale, soprattutto ad alta qualificazione e specializzazione.

Lo schema della trattazione, notazione compresa, è parzialmente ripreso dal Capitolo 12 di [C] (terza edizione, 2001).

4.1 Il contratto di assicurazione

Prima di tutto, definiamo brevemente la nozione di contratto di assicurazione. Un **contratto di assicurazione**, in generale stipulato tra 2 parti, è un contratto in base a cui l'assicuratore si impegna a pagare al beneficiario una determinata somma di denaro qualora un determinato evento, o uno qualsiasi tra un certo insieme di eventi, si verifichi.

Per l'esattezza, possiamo rifarci alla normativa fornita dal Codice Civile (art. 1882-1932), che recita così: *'L'assicurazione è il contratto col quale l'assicuratore, verso il pagamento di un premio, si obbliga a rivalere l'assicurato, entro i limiti convenuti, del danno ad esso prodotto da un sinistro, ovvero a pagare un capitale o una rendita al verificarsi di un evento attinente alla vita umana.'*

Questa definizione è sufficientemente generale da racchiudere tutte le tipologie di assicurazioni, e naturalmente nel contratto sono specificate le modalità e le forme di pagamento con cui l'assicuratore dovrà eventualmente pagare la prestazione.

Detta in altri termini, un'assicurazione consiste nel trasferimento di un rischio da un soggetto più debole, il **contraente**, a un soggetto più forte, la **Compagnia di Assicurazioni (o assicurativa)**.

Va notato che non sempre il contraente, controparte dell'assicuratore, e il *beneficiario* sono la stessa persona. Ad esempio, per un'assicurazione sulla vita, in caso di morte dell'assicurato, ovviamente a ricevere la prestazione saranno i componenti della sua famiglia o le persone più vicine al defunto.

Per quanto riguarda invece l'assicuratore, si tratta praticamente sempre di una *Compagnia di Assicurazioni* (le più famose e con i fatturati maggiori in Italia sono Unipol, Generali, Gruppo Intesa San Paolo, ed altre).

Una prima fondamentale distinzione tra 2 diverse tipologie di assicurazioni è quella tra *ramo Danni* e *ramo Vita*.

- **Ramo Danni:** In queste assicurazioni, il pagamento (più spesso si usa il termine *prestazione*) da parte della Compagnia viene effettuato quando si verifica un determinato evento, chiaramente di natura aleatoria. Eventi del genere possono essere il furto di un oggetto assicurato, la sua distruzione tramite incendio o terremoto o evento naturale, o anche tramite teppismo, come durante una manifestazione politica violenta. Una tipologia molto nota del Ramo Danni è quella delle polizze degli automezzi, e in particolare quella con cui tutti i possessori hanno a che fare è la cosiddetta **RC Auto**, che è obbligatoria per ogni vettura circolante. RC sta per 'Responsabilità Civile' e, come è noto, stabilisce che, qualora il possessore dell'auto causi un danno ad altra auto o a persone, la Compagnia si impegna a pagare i danni causati, quindi a risarcire il soggetto, o i soggetti, danneggiati.

  Sulla RC Auto ci sarebbe molto da dire: ogni anno viene pagato un premio da parte della persona assicurata che può essere molto variabile, in base ad una serie di parametri, specificamente richiesti dalla Compagnia prima della stipula del contratto di assicurazione.

  Per il calcolo del premio annuale, si usa una procedura detta *Bonus Malus* in cui in sintesi, il premio si abbassa anno dopo anno se il contraente non commette incidenti. Ogni assicurato ha una determinata *classe di merito* che ne determina l'affidabilità: nei primi anni di possesso di un veicolo, e quindi di assicurazione, la classe è quella iniziale, e corrisponde a un premio alto, via via, se non ci sono stati incidenti nel frattempo, si sale di classe e il premio progressivamente si abbassa. Altri dati che concorrono alla definizione del premio sono la cilindrata della vettura, l'età del conducente, la quantità stimata di km da percorrere in un anno, il numero medio di incidenti all'anno nella zona in cui la vettura verrà maggiormente usata, ed altri ancora. Ovviamente, se nella città in cui verrà usata prevalentemente l'autovettura c'è un numero di incidenti alto, è più probabile che si verifichi un danneggiamento, e il premio risulterà più alto. Stesso discorso per il numero stimato di chilometri: più la macchina gira, più è alta la probabilità di incidente, e il premio aumenta.

Inoltre, le polizze RC Auto prevedono un *massimale*, vale a dire un ammontare massimo di denaro che le Compagnie si impegnano a pagare come risarcimento dei danni. I massimali possono anche superare i 2 milioni di euro, cifre da pagare in casi particolarmente tragici, ad esempio quando si causa un danno irreversibile a una persona, come una disabilità permanente. In generale, la maggior parte dei danni da piccoli incidenti, non superano le poche migliaia di euro.

Per concludere la breve digressione sulla RC Auto, va ricordato che essa tutela non soltanto chi possiede la vettura ma anche chiunque la guidi, e naturalmente va sempre specificato che i danni devono essere stati causati non intenzionalmente. Prima di pagare, la Compagnia deve sempre accertarsi che il proprio assicurato non avesse avuto colpe nell'incidente.

- **Ramo Vita:** Ci sono molti diversi tipi di assicurazioni in questo ramo. Ad esempio, è molto standard, da parecchi anni, la polizza *caso morte*, in cui la Compagnia si impegna a versare a un beneficiario un capitale, o una rendita vitalizia, a un familiare dell'assicurato[1]. Oppure ci sono le polizze *caso vita*, che vengono corrisposte, in questo caso al beneficiario stesso, se supera un certo limite di età. Di fatto, queste assicurazioni assomigliano molto a delle pensioni integrative: il contraente versa le rate periodiche che si capitalizzano in un fondo che poi serve per la rendita futura, la stessa dinamica del versamento dei contributi nella previdenza di tipo contributivo. Oppure, ci sono formule miste che prevedono entrambe le casistiche: se l'assicurato arriva vivo a una certa età predefinita, allora è lui il beneficiario della rendita, altrimenti un parente o persona cara.

[1] Piccola nota strettamente personale: anche nella famiglia ci fu un caso di rendita vitalizia, corrisposto a mia nonna per tutta la vita da una Compagnia, dopo la scomparsa di suo marito.

Questo tipo di assicurazioni sono sempre più diffuse, per varie motivazioni anche economiche: le pensioni corrisposte dagli enti di previdenza si abbassano costantemente, molte persone restano precarie per tanti anni e a volte perdono i contributi versati nella Gestione Separata INPS, e inoltre le partite IVA e affini sono sempre più diffuse. In sintesi, molte persone che lavorano hanno basse aspettative di pensione e devono quindi 'integrare' con altre entrate future, a volte più rischiose (i vari tipi di fondi pensione sono spesso composti da portafogli di titoli azionari e obbligazionari, e così via).

Oltre a questi 2 rami fondamentali, possono esserci altre tipologie di assicurazioni, come le **assicurazioni sociali** o le **assicurazioni sulla salute**, che differiscono per qualche elemento. Le assicurazioni sociali, ad esempio, comprendono le coperture assicurative fornite dalle Casse Previdenziali, i Fondi Pensione, o anche quelle dei sistemi pubblici tipo INPS, e le loro prestazioni sono tutti i vari tipi di pensioni (di anzianità, di vecchiaia, di invalidità, e così via).

Le assicurazioni sulla salute sono invece quelle legate alla sanità, e prevedono risarcimenti per le spese mediche sostenute per interventi, visite diagnostiche e specialistiche, ricoveri, eccetera. Quelle private, in particolare, sono molto diffuse negli USA, laddove non esiste un sistema sanitario di welfare universale come in Italia e negli altri Paesi europei.

Come è facile immaginare, le Compagnie affrontano dei rischi nella loro attività, totalmente legati all'aleatorietà degli eventi che possono causare i loro esborsi. In altre parole, le spese che le Compagnie dovranno affrontare, non possono essere perfettamente quantificabili, di conseguenza dovranno accantonare delle *riserve* di capitale, che tratteremo di seguito.

Non soltanto l'ammontare delle prestazioni è aleatorio, ma anche le tempistiche di pagamento, legate a se e a quando quegli eventi possono accadere (ad esempio, un incidente tra vetture o la morte di un cliente). In un certo senso, le polizze RC Auto sono un pò più gestibili, avendo dei massimali: se supponiamo che una Compagnia abbia 1000 assicurati in un certo anno, e tutti scelgono una polizza con massimale da 2 milioni di euro, nel caso peggiore (sarebbe incredibile, intendiamoci) in cui tutti i contraenti provochino degli incidenti tali da dover pagare l'intero massimale, alla Compagnia 'basterebbero' 2 miliardi di euro per far fronte a tutti gli impegni. Ovviamente, difficile immaginare che poi (ma anche probabilmente prima) non fallisca.

Per una Compagnia, è ancora più difficile è avere la certezza di poter fare fronte ai propri impegni finanziari nelle polizze del ramo Vita. Consideriamo un qualsiasi soggetto assicurato nel caso morte. In questo caso l'incertezza è molteplice: la Compagnia non sa quando morirà, e quindi quando dovrà cominciare a pagare la rendita al beneficiario. Inoltre non sa quanto dovrà pagare, perchè questo dipenderà dal periodo di assicurazione. E infine, non sa nemmeno per quanto tempo pagherà la rendita vitalizia al beneficiario, ossia non sa quanti altri anni ancora il beneficiario sopravviverà al contraente. Come si può capire facilmente, l'aleatorietà è altissima e il problema diventa estremamente complesso.

Semplificando al massimo, si può usare una sorta di criterio del 'valor medio': se vengono accese 1000 polizze uguali in cui il pagamento è di 2000 euro l'una, e si stima, in base ad un'analisi dei dati, che il 15% dei casi porterà a un pagamento di quella cifra, quindi $p = 0.15$ e $1 - p = 0.85$, la cifra media da accantonare sarà data da:

$$0.15 \cdot 1000 \cdot 2000 = 300000 \text{ euro.}$$

Inoltre, essendo spese da sostenere in futuro, ovviamente questa cifra andrà attualizzata secondo un tasso di mercato che, va da sè, è anch'esso aleatorio, anche se più facilmente approssimabile, sapendo le condizioni economiche e le politiche monetarie adottate. Questo ci porta al concetto chiave del **valor attuale medio** (o **valore attuale atteso**), che preciseremo meglio dopo il seguente esempio.

Esempio 61. *Supponiamo che una Compagnia assicurativa stipuli in un anno* 350 *contratti di assicurazione che prevedano, qualora accada un determinato danno, un risarcimento di* 12000 *euro ad ogni contraente. Data la probabilità stimata dell'*8% *che tale danno accada (e quindi il* 92% *di probabilità che non accada), e dato un tasso annuo di mercato, o di inflazione annua, stimato al* 2.2%, *calcoliamo il valore attuale medio dell'esborso totale della Compagnia nell'anno.*

*Per semplicità, assumendo che tutti i risarcimenti vengano liquidati a fine anno, dobbiamo attualizzare al tasso di mercato l'esborso totale dato dalla somma di tutti i risarcimenti, sull'*8% *dei contratti, vale a dire:*

$$\frac{8}{100} \cdot 350 \cdot 12000 \cdot (1.022)^{-1} + \frac{92}{100} \cdot 350 \cdot 0 \cdot (1.022)^{-1} = 328767.123 \textit{ euro.}$$

Se per assurdo non ci fosse nessuna attualizzazione, ossia il tasso di mercato da considerare fosse il minimo possibile, cioè lo 0%, *il totale da rimborsare sarebbe il massimo possibile, vale a dire* $0.08 \cdot 350 \cdot 12000 = 336000$ *euro.*

Introduciamo ora una notazione anche per il **valor attuale medio** delle prestazioni della Compagnia e chiamiamolo (come in [C]) $W(X(s,t))$, ossia il valore attuale medio degli esborsi da corrispondere tra gli istanti s e t da parte della Compagnia. Nel precedente esercizio, $s = 0$, $t = 1$ e la soluzione è $W(X(0,1)) = 328767.123$ euro, nel caso di un unico rimborso. Va notato che nell'espressione $W(X(s,t))$ non è specificata in modo esplicito la struttura dei tassi, quindi si intende che quella adottata sia stabilita altrove, cioè dalla base tecnica.

Come si può notare anche da un caso molto semplice, l'assicuratore deve coprirsi, o immunizzarsi, dai possibili rischi, e ciò è fattibile solo se si hanno informazioni attendibili per valutare sia l'entità del rischio (ossia il numero di contratti per cui bisognerà pagare il risarcimento e la loro tempistica) e anche il tasso di mercato per l'attualizzazione. Qualche parola su questo tasso: soprattutto quando i tempi diventano lunghi, come ben sappiamo è estremamente difficile 'indovinare' il tasso corretto per la valutazione, di conseguenza rimane un certo livello di arbitrio. Sicuramente, poichè tutte le Banche Centrali fissano un tasso di inflazione da non superare annualmente, il cosiddetto *inflation target*, è sensato scegliere dei tassi che non superino troppo questo benchmark, tipicamente del 2%.

D'altro canto, per il calcolo del premio, o dei premi, si tengono in conto le tavole di mortalità, da cui si ricava la v.a. durata di vita e i rispettivi valori di q_x e p_x. Una **base tecnica del I ordine** è proprio costituita da una struttura demografica da cui esplicitare le probabilità di morte e sopravvivenza a ogni età e da un tasso utilizzato per la valutazione, detto **tasso tecnico**.

Tornando alla valutazione del flusso di uscite della Compagnia, è proprio da questa valutazione che dipenderà l'impegno finanziario, invece, del contraente.

4.1.1 Il Principio di Equivalenza Attuariale

Il contraente paga un **premio** oppure una sequenza di più **premi**. Nel primo caso si parla di **premio unico**, nel secondo caso di **premi periodici**. Quando il premio in questione è unico, si può usare la scrittura P^u. Tralasciando ogni altra eventuale spesa accessoria, se il premio unico deve rappresentare l'unica entrata della Compagnia, dobbiamo scrivere un'equivalenza di bilancio tra entrate ed uscite. Detti t_0 il tempo iniziale e t_N il tempo finale, e assumendo che il premio P^u venga versato in t_0, quest'equivalenza si potrà scrivere semplicemente così:

$$P^u = W(X(t_0, t_N)).$$

Questa relazione esprime un *principio di equivalenza attuariale*, cioè un'espressione che descrive l'equilibrio tra i valori attuali medi di premi e prestazioni. Essendo P^u corrisposto al primo istante, non va attualizzato, e poichè è una quantità certa, il suo valor medio coincide con se stesso.

Più in generale, consideriamo il caso dei premi periodici, e chiamiamo $P(t_0, t_N)$ il flusso di cassa per la Compagnia costituito dai premi periodici incassati tra t_0 e t_N. A differenza del premio unico, $P(t_0, t_N)$ è aleatorio, in quanto non si può sapere con certezza quanti premi verranno versati dall'assicurato, non sapendo per quanto tempo resterà in vita. Quindi, analogamente a come è stato fatto con il flusso delle prestazioni, si potrà calcolare il valor attuale medio $W(P(t_0, t_N))$.

Ora possiamo esplicitare il **Principio di Equivalenza Attuariale** nella sua forma più estesa:

$$W(P(t_0, t_N)) = W(X(t_0, t_N)). \tag{4.1.1}$$

La relazione (4.1.1) è una *condizione di equità*, in quanto esprime l'equivalenza, in valor attuale medio, dei due flussi. Poichè generalmente la Compagnia deve stabilire l'entità dei premi, questa equazione, avendo i premi come incognite, serve a calcolare, o meglio a stimare, quale deve essere il loro ammontare (da notare che solitamente i premi non sono costanti). Ovviamente, l'equazione (4.1.1) è semplice, e non tiene conto di tutte le altre spese che la Compagnia deve sostenere, dal pagamento dei dipendenti alle spese di gestione delle polizze, alla pubblicità e così via.

Soffermiamoci ora brevemente sulle formule per il calcolo di questi valori attuali medi nel caso di un'assicurazione caso morte. Per semplificare la notazione, supponiamo di considerare solo gli anni interi, quindi $h = 0, 1, \ldots, N$. La prestazione caso morte viene erogata alla fine di un determinato anno, per cui va attualizzata ma anche moltiplicata per la probabilità che la morte avvenga in quel determinato anno, ma anche per la probabilità che l'assicurato sia rimasto in vita fino all'anno precedente. Chiamando ${}_{h|}p_x$ la probabilità di sopravvivenza fino all'h-esimo anno e q_{x+h} la probabilità di morte entro l'h-esimo anno, la h-esima prestazione sarà pagata con probabilità ${}_{h|}p_x \cdot q_{x+h}$. Formalizzeremo meglio questo principio successivamente, ma per ora possiamo già proporre alcuni semplici esempi numerici.

Nel prossimo esempio, confrontiamo 2 diverse situazioni che possono verificarsi per una polizza sulla vita. In un caso, la polizza deve stabilire il premio unico P^u e nel secondo caso deve stabilire il premio annuo costante, sempre in base al principio descritto da (4.1.1).

Esempio 62. *Prendiamo in esame un contratto di assicurazione sulla vita stipulato da una testa di età x nel quale la Compagnia si impegna a pagare, alla fine dell'anno in cui il contraente morirà, un capitale C di* 800000 *euro, nel caso in cui il contraente muoia entro* 3 *anni. Supponiamo che la valutazione venga effettuata ad un tasso tecnico (annuo) dell'*1.8%*, e che, basandoci su una tavola di mortalità, la probabilità di morte entro il primo anno sia* 0.05*, entro il secondo anno sia di* 0.08*, entro il terzo anno sia di* 0.13*. Calcolare, in base al Principio di Equivalenza Attuariale, la struttura dei premi nei due seguenti casi:*

a) il premio unico P^u da versare anticipatamente;

b) i 3 *premi costanti P da versare a inizio di ogni anno.*

Cominciamo dal caso a), ma preliminarmente schematizziamo le varie probabilità che ci sono necessarie:

- $q_x = 0.05$*;*
- ${}_{1|}p_x = 0.95$*, mentre* $q_{x+1} = 0.08$*;*
- ${}_{2|}p_x = 0.92$*, mentre* $q_{x+2} = 0.13$*.*

Il calcolo del valore attuale medio del flusso delle prestazioni della Compagnia risulta quindi:

$$W(X(0,3)) = C\left[q_x(1+i)^{-1} +_{1|} p_x \cdot q_{x+1}(1+i)^{-2} +_{2|} p_x \cdot q_{x+2}(1+i)^{-3}\right] =$$

$$= 800000 \cdot \left[0.05 \cdot (1.018)^{-1} + 0.95 \cdot 0.08 \cdot (1.018)^{-2} + 0.92 \cdot 0.13 \cdot (1.018)^{-3}\right] =$$

$$= 188655.49 \text{ euro.}$$

Quindi $P^u = 188655.49$ *euro, cioè il valore del premio unico corrisponde al valore attuale medio del flusso delle prestazioni.*

Nel caso b), P risulta essere l'incognita di un'equazione che uguaglia i valori attuali medi di premi e prestazioni, quindi della (4.1.1). Abbiamo già calcolato $W(X(0,3))$*, ora imponiamo:*

$$W(P(0,3)) = P + P \cdot 0.95 \cdot (1.018)^{-1} + P \cdot 0.92 \cdot (1.018)^{-2} = 188655.49 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad P = \frac{188655.49}{2.82} = 66899.109 \text{ euro,}$$

ossia, pagando a inizio ogni anno una rata di 66899.109 *euro, si ottiene un valore attuale medio dei premi che coincide con quello delle prestazioni.*

4.1.2 Premi e caricamenti

Nell'esempio precedente, abbiamo calcolato il cosiddetto **premio puro**. In generale, il premio puro non viene comunemente applicato, e quello che viene solitamente richiesto dalle Compagnie è il **premio di tariffa**, che è comprensivo di ulteriori oneri che vengono detti **caricamenti**.

I caricamenti, che possono arrivare anche al 30% e più del premio, sono necessari per la gestione della Compagnia, per le normali spese che tutte le aziende devono affrontare. Inoltre, vanno considerati e sono di grande importanza anche i **caricamenti di sicurezza**. Questi caricamenti, fondamentalmente delle spese aggiuntive al premio equo (quello basato soltanto sul principio di equivalenza attuariale), sono necessari per mantenere la solvibilità della Compagnia anche in situazioni di tassi fortemente avverse, o nel caso in cui un gran numero di eventi che comportino gli esborsi si verifichino.

Il caricamento di sicurezza applicato può essere **esplicito**, quando le spese di acquisizione, gestione e di amministrazione sono considerate nel premio di tariffa. Oppure può essere **implicito**, cioè basato sulla scelta della base tecnica del I ordine utilizzata per la valutazione. Ad esempio, scegliendo un tasso tecnico i basso, che corrisponde a una bassa rivalutazione delle prestazioni future, oppure assumendo delle tavole di mortalità 'a forte mortalità'nel caso di assicurazioni tipo morte.

Perchè queste strategie corrispondono a dei caricamenti? Assumere un tasso basso significa che i premi, che sono certi, si rivalutano poco nel corso degli anni, e quindi in caso di pagamento di una prestazione, potrebbero non bastare, e quindi devono essere aumentati ex ante. Analogamente, assumere una mortalità un pò superiore a quella reale, o, viceversa, nel caso vita, una mortalità un pò inferiore a quella reale, può giustificare l'aumento dei premi di tariffa.

D'ora in poi, consideriamo i premi in assenza di caricamenti. Riassumiamo qui le definizioni complete delle tipologie fondamentali di premi.

Definizione 63. *Si chiama **premio puro** P il premio calcolato sulla base del rischio che la Compagnia corre nel corso di tutto il periodo di assicurazione.*

Il premio puro P è detto **unico** (quindi $P = P^u$) se viene pagato in una sola soluzione, in generale alla stipula del contratto assicurativo o comunque prima dell'inizio del periodo di assicurazione, oppure **periodico** se viene corrisposto ad intervalli regolari di tempo, ad esempio se è annuale o semestrale.

Ricordiamo la relazione che sussiste tra P^u e i premi periodici P_j, per il Principio di Equivalenza Attuariale (4.1.1). Per semplicità indichiamo i periodi come anni con l'indice $h = 0, 1, \dots, N$:

$$P^u = W(P(0,N)) = \sum_{h=0}^{N-1} P_h \cdot {}_{h|}\, p_x (1+i)^{-h},$$

nel caso di premi periodici non costanti, oppure

$$P^u = W(P(0,N)) = \sum_{h=0}^{N-1} P \cdot {}_{h|}\, p_x (1+i)^{-h},$$

nel caso di premi periodici costanti.

Definizione 64. *Si chiama **premio naturale** N il premio calcolato sulla base del rischio che la Compagnia corre nel corso di un solo anno di assicurazione.*

In particolare, chiamando N_h il premio naturale relativo all'h-esimo anno, e detto C il capitale che costituisce la prestazione, la formula per ricavarlo sarà:

$$N_h = W(X(h-1,h)) = Cq_{x+h}(1+i)^{-1}. \tag{4.1.2}$$

Qual è la relazione tra premi puri periodici e premi naturali? Possiamo scrivere il premio unico nelle 2 diverse forme e poi eguagliarle:

$$\begin{cases} P^u = \sum_{h=0}^{N-1} P \cdot {}_{h|}\, p_x(1+i)^{-h} \\ \\ P^u = \sum_{h=0}^{N-1} q_{x+h} \cdot {}_{h|}\, p_x(1+i)^{-h} = \sum_{h=0}^{N-1} N_{h+1} \cdot {}_{h|}\, p_x(1+i)^{-h} \end{cases},$$

avendo considerato il capitale unitario $C = 1$ e sostituito la (4.1.2). Di conseguenza, otteniamo l'espressione di P come media dei premi naturali pesati con i fattori di sconto demografico-finanziari:

$$P = \frac{\sum_{h=0}^{N-1} N_{h+1} \cdot {}_{h|}\, p_x(1+i)^{-h}}{\sum_{h=0}^{N-1} {}_{h|}p_x(1+i)^{-h}}. \tag{4.1.3}$$

L'espressione (4.1.3) suggerisce che, essendo P una media pesata dei premi naturali, il suo valore sarà sempre compreso tra il minimo e il massimo premio naturale. Poichè i premi naturali sono in successione crescente, cioè:

$$N_1 \leq N_2 \leq \cdots \leq N_N,$$

allora P sarà compreso nell'intervallo $[N_1,\ N_N]$.

Definizione 65. *Si chiama* ***premio di riserva*** P_h^R *relativo all'h-esimo anno, la differenza tra premio naturale e premio puro periodico:*

$$P_h^R = P - N_h. \tag{4.1.4}$$

Va notato che i premi di riserva (4.1.4) possono essere sia positivi che negativi: nel primo caso vanno ad accumularsi nella riserva matematica, nel secondo caso non sono sufficienti a coprire le possibili uscite e allora è necessario attingere agli accantonamenti fatti negli anni passati.

Vediamo ora più nello specifico alcuni contratti di assicurazioni standard semplificati, in cui non teniamo conto di alcun caricamento (per ulteriori approfondimenti, si veda il Capitolo 10 di [ABRZ]). In questa Sezione inoltre introduciamo altri simboli della notazione standard in Matematica Attuariale.

4.1.3 Caso vita

Un tipo elementare di assicurazioni sulla vita caso vita è quello cosiddetto del **capitale differito**, in cui una testa di età x paga un premio unico puro P^u alla Compagnia, in cambio dell'impegno della controparte di versare al beneficiario, dopo N ulteriori anni, un capitale C nel caso in cui il beneficiario, o l'assicurato, sarà ancora in vita all'età $x+N$. Quindi, dal punto di vista del contraente, si paga P^u al tempo x, si può ricevere o 0, in caso di morte tra x e $X+N$, oppure C, che però va attualizzato al tasso tecnico i, per gli N anni che intercorrono. Quindi, nella notazione usata precedentemente:

$$W(P(x,x+N)) = P^u, \qquad W(X(x,x+N)) = C_{N|}p_x(1+i)^{-N}.$$

Il Principio di Equivalenza Attuariale ci consente quindi di calcolare il premio unico:

$$P^u = C_{N|}p_x(1+i)^{-N}.$$

Va notato che il prodotto tra fattore di attualizzazione e probabilità di sopravvivenza ha una denominazione e un simbolo proprio: si chiama **fattore di sconto demografico-finanziario** e talvolta si indica con:

$$_{N|}E_x =_{N|} p_x(1+i)^{-N},$$

da cui segue semplicmente:

$$P^u = C_{N|}E_x.$$

Un altro modo per calcolare $_{N|}E_x$ si basa sulle proprietà delle funzioni biometriche. Avendo a disposizione un tasso tecnico i, possiamo porre, per ogni $x \in [0,\omega]$, $(1+i)^{-x}l_x = D_x$, che chiameremo **valore di commutazione caso vita**. Avremo quindi:

$$_{N|}E_x =_{N|} p_x(1+i)^{-N} =_{N|} p_x\frac{D_N}{l_N} = \frac{l_{x+N}}{l_x}\frac{D_N}{(1+i)^N D_N} =$$

$$= \frac{(1+i)^{x+N}D_{x+N}}{(1+i)^x D_x(1+i)^N} = \frac{D_{x+N}}{D_x} \implies P^u = C\frac{D_{x+N}}{D_x}.$$

Quindi avendo un tasso tecnico, possiamo tabulare pure i valori D_x nella tavola di mortalità, e possiamo determinare più facilmente il premio P^u, come nell'Esempio seguente.

Esempio 66. *Supponiamo di utilizzare la seguente tavola di mortalità sintetica (dati ISTAT donne in provincia di Milano,* 2014*), con un tasso tecnico del* 3.5%*, da cui* $D_x = l_x(1.035)^{-x}$*, per* x *da* 0 *a* 40*. Approssimiamo i* D_x *alla terza cifra:*

x	l_x	d_x	D_x
0	100000	201	100000
1	99799	18	96424.154
2	99781	16	93146.631
3	99765	14	89982.314
4	99751	13	86927.233
5	99738	6	83976.719
6	99733	6	81132.859
7	99727	6	78384.52
8	99721	6	75729.279
9	99715	6	73163.983
10	99709	6	70685.585
11	99703	6	68291.142
12	99697	6	65977.809
13	99691	6	63742.839
14	99685	7	61583.577
15	99678	8	59496.863
16	99670	9	57480.278
17	99661	9	55531.485
18	99652	10	53648.764
19	99642	11	51829.353
20	99631	11	50071.141
21	99620	12	48372.573
22	99608	13	46731.156
23	99595	14	45144.982
24	99581	14	43612.209
25	99567	14	42131.476
26	99553	15	40701.016
27	99538	15	39318.728
28	99523	16	37983.384
29	99507	16	36693.022
30	99491	16	35446.495
31	99475	17	34242.313
32	99458	17	33078.707
33	99441	19	31954.64
34	99422	22	30868.15
35	99400	27	29817.7
36	99373	30	28801.546
37	99343	33	27819.18
38	99310	37	26869.506
39	99273	42	25951.203
40	99231	45	25063.018

Calcolare:

1. *il premio unico* P^u *da versare per una donna di* 25 *anni per assicurarsi la riscossione di un capitale di* 200000 *euro qualora fosse ancora in vita a* 38 *anni;*

2. *il capitale a cui si ha diritto versando* 57000 *euro all'età di* 26 *anni qualora si rimanesse in vita fino a* 39 *anni.*

Al punto 1*, ci basta applicare la formula descritta in precednza, facendo uso delle informazioni contenute nella tavola, con* $x = 25$ *ed* $N = 13$*:*

$$P^u = 200000 \cdot_{13|} E_{25} = 200000 \cdot \frac{D_{38}}{D_{25}} = 200000 \cdot \frac{26869.506}{42131.476} = 127550.746 \text{ euro.}$$

Il punto 2 *richiede invece semplicemente l'applicazione della formula inversa, con* $x = 26$ *ed* $N = 13$*:*

$$C = \frac{P^u}{_{N|}E_x} = \frac{P^u \cdot D_x}{D_{x+N}} = \frac{57000 \cdot D_{26}}{D_{39}} = \frac{57000 \cdot 40701.016}{25951.203} = 89396.931 \text{ euro.}$$

Oltre al capitale differito, un'altra importante tipologia di contratto di assicurazione nel ramo vita è quello della rendita vitalizia. In sostanza, in cambio del pagamento iniziale del premio unico puro da parte del contraente, questo contratto dà diritto ad una rendita posticipata, costante, per tutta la durata di vita residua. Nel caso più semplice, la prima rata viene corrisposta alla fine dell'anno successivo a quello del pagamento del premio, e prosegue fino all'ultimo anno completo di vita dell'assicurato, quindi fino all'età $\omega - 1$, al più.

In questo caso, introduciamo un nuovo simbolo che indica la probabilità per una testa di età x di morire tra le età $x + M$ ed $x + M + N$. Per la precisione, lo ricaviamo come segue:

$$Pr(\{x + M \leq T \leq x + M + N \mid T > x\}) = \frac{Pr(\{x + M \leq T \leq x + M + N\})}{Pr(\{T > x\})} =$$

$$= \frac{S(x+M) - S(x+M+N)}{S(x)} = \frac{F(x+M+N) - F(x+M)}{1 - F(x)} =$$

$$= \frac{F(x+M+N) - F(x+M)}{1 - F(x)} \frac{1 - F(x+M)}{1 - F(x+M)} =$$

$$= \frac{F(x+M+N) - F(x+M)}{1 - F(x+M)} \frac{1 - F(x+M)}{1 - F(x)} =_{N|} q_{x+M} \cdot_{M|} p_x =_{M|N} q_x.$$

Quindi, ${}_{M|N}q_x$ denota la probabilità di morte compresa tra i tempi $x+M$ e $x+M+N$ per una testa di età x. Inoltre il simbolo ${}_{M|N}q_x$ può anche essere espresso con la funzione biometrica del numero dei sopravviventi, ossia:

$$
\begin{aligned}
{}_{M|N}q_x &= \frac{F(x+M+N)-F(x+M)}{1-F(x+M)}\frac{1-F(x+M)}{1-F(x)} = \\
&= \left(1-\frac{l_{x+M+N}}{l_{x+M}}\right)\frac{l_{x+M}}{l_x} = \frac{l_{x+M}-l_{x+M+N}}{l_x}.
\end{aligned}
$$

Ora possiamo calcolare il premio unico nell'assicurazione la cui prestazione è una rendita vitalizia (al solito, consideriamo $v=(1+i)^{-1}$, con i tasso tecnico). Qui $N=1$, ossia la prima rata scatta nell'anno successivo a x.

$$
P^u = R\left[v\cdot{}_{1|1}\,q_x + (v+v^2)\cdot{}_{2|1}\,q_x + \cdots + \left(\sum_{j=1}^{\omega-x-1} v^j\right)\cdot{}_{\omega-x-1|1}\,q_x\right] =
$$

$$
= R\left[v\cdot\frac{l_{x+1}-l_{x+2}}{l_x} + (v+v^2)\cdot\frac{l_{x+2}-l_{x+3}}{l_x} + \cdots + \left(\sum_{j=1}^{\omega-x-1} v^j\right)\cdot\frac{l_{\omega-1}-l_\omega}{l_x}\right] =
$$

$$
= \frac{R}{l_x}\cdot\left[\sum_{j=1}^{\omega-x-1} v^j\cdot l_{x+j}\right] = R\cdot a_x.
$$

Quindi il premio unico è il prodotto del valore della rata moltiplicata per la quantità a_x. Risulta facile provare che, inoltre:

$$
a_x = \sum_{j=1}^{\omega-x-1} {}_{j|}E_x. \tag{4.1.5}
$$

Se poi introduciamo il valore di commutazione

$$
N_x = \sum_{j=x}^{\omega-1} D_j,
$$

possiamo riformulare a_x nella maniera più operativamente comoda, ossia:

$$
a_x = \frac{D_{x+1}}{D_x} + \frac{D_{x+2}}{D_x} + \cdots + \frac{D_{\omega-1}}{D_x} = \frac{\sum_{j=x}^{\omega-1} D_j}{D_x} = \frac{N_{x+1}}{D_x},
$$

ricordando che, per definizione,

$$
{}_{j|}E_x = \frac{D_{x+j}}{D_x}.
$$

Vanno dunque fatte 2 osservazioni importanti: prima di tutto, la relazione (4.1.5) stabilisce che a_x è il **valore attuale di una rendita unitaria, posticipata, annua e vitalizia** per una testa di età x, data la base tecnica in vigore (notare anche la somiglianza con il simbolo che indica il valore attuale di una rendita posticipata e cc.: $a_{\overline{N}|i}$).

Inoltre, a_x, come premio unico P^u da versare, è anche la somma dei fattori di attualizzazione di $\omega - x - 1$ contratti a capitale differito con capitale unitario. Il fatto che il premio unico nella rendita vitalizia unitaria sia una somma di premi a capitale differito unitario schematizza il cosiddetto **principio di composizione dei contratti**. Segue un esempio di implementazione di una rendita vitalizia.

Esempio 67. *Basandosi sempre sulla tabella ISTAT nella Sezione* 3.2*, calcolare il premio unico puro versato da una testa nella coorte* $80 - 84$ *per riscuotere una rendita vitalizia di* 15000 *euro, pagata alla fine di ogni quinquennio se la testa sarà ancora in vita (usiamo il quinquennio a mò di anno, per semplicità), utilizzando il tasso tecnico dell'*1.6%*.*

Usando la formula vista in precedenza, avremo:

$$P^u = \frac{15000}{71376}\big[53927(1.016)^{-5} + 31202(1.016)^{-10} +$$

$$+10652(1.016)^{-15} + 1881(1.016)^{-20} + 113(1.016)^{-25} + 1 \cdot (1.016)^{-30}\big] =$$

$$= 18131.255 \textit{ euro.}$$

Allo stesso risultato saremmo anche arrivati usando i fattori di commutazione N_{x+1} *e* D_x*, una volta calcolati.*

4.1.4 Caso morte

Le assicurazioni **caso morte** sono, come già detto, quelle in cui ci si assicura contro il rischio di decesso, e in cui la Compagnia si impega a pagare ai beneficiari la prestazione se la morte della testa assicurata cade entro una certa data fissata. Quindi, in sintesi, la prestazione relativa a una testa di età x viene pagata $k+1$ anni dopo se la morte è sopraggiunta tra l'età $x+k$ e l'età $x+k+1$. Questa è l'unica prestazione prevista dal contratto, per cui non ce ne è nessuna prima dell'età $x+k$, oppure successiva a $x+h+1$. Quindi, chiamando C il capitale da pagare nella prestazione, il valore attuale medio della prestazione è dato da:

$$C \cdot v^{k+1} \cdot Pr(\{x+k \leq T \leq x+k+1\}) +$$

$$+0 \cdot v^{k+1} \cdot [1 - Pr(\{x+k \leq T \leq x+k+1\})] =$$

$$= C \cdot v^{k+1} \cdot [S(x+k) - S(x+k+1)] =$$

$$= C \cdot v^{k+1} \cdot \frac{S(x+k) - S(x+k+1)}{S(x+k)} \cdot S(x+k) =$$
$$= C \cdot v^{k+1} \cdot {}_{k|}p_x \cdot q_{x+k},$$

di cui già conosciamo la relazione con il premio naturale N_h.

Il premio unico è dunque dato dal valore attuale atteso della prestazione, che si può scrivere in varie formulazioni, ne vediamo qui 2:

$$P^u = C \cdot v^{k+1} \cdot {}_{k|}p_x \cdot q_{x+k} = v^{k+1} \frac{d_{x+k}}{l_x}.$$

Una variante importante è l'**assicurazione morte vita intera**, in cui la Compagnia si impegna a pagare a un beneficiario un capitale C alla fine dell'anno di morte, qualunque esso sia. Per il principio di composizione dei contratti, il premio unico è una somma di premi unici di singoli assicurazioni caso morte anno per anno, quindi:

$$P^u = C \left[\frac{v d_x}{l_x} + \frac{v^2 d_{x+1}}{l_x} + \cdots + \frac{v^{\omega - x} d_{\omega-1}}{l_x} \right]. \tag{4.1.6}$$

Esempio 68. *Basandosi sempre sulla tabella ISTAT nella Sezione* 3.2*, consideriamo un'assicurazione morte vita intera del tipo seguente: la Compagnia si impegna a versare al beneficiario di una testa della coorte* $95-99$ *un capitale di* 65000 *euro, utilizzando il tasso tecnico dell'*1.9%.

In base alla formula del caso morte vita intera, si ha:

$$P^u = 65000 \left[\frac{1.019^{-5} \cdot 8771}{10652} + \frac{1.019^{-10} \cdot 1881}{1767} + \frac{1.019^{-15} \cdot 112}{113} + \right.$$
$$\left. + \frac{1.019^{-20} \cdot 1}{1} \right] = 199224.859 \textit{ euro.}$$

Come è facilmente intuibile, in questi casi il premio è molto più alto del normale caso morte, in quanto la Compagnia rischia di pagare ogni anno.

Infine, un breve cenno alle cosiddette **assicurazioni miste**. Si chiamano miste in quanto svolgono contemporaneamente 2 funzioni: coprire il rischio di morte e al contempo garantire un capitale o una rendita al beneficiario. Nell'**assicurazione mista semplice** la Compagnia si impegna a pagare un capitale C alla persona assicurata di età x se sarà ancora in vita al tempo $x+h$ oppure al beneficiario alla fine dell'anno di decesso del contraente, se il suo decesso avviene tra x e $x+h$. Quindi, il premio unico è una somma di 2 premi: uno di un'assicurazione a capitale differito e uno di un contratto caso morte:

$$P^u = C \left[{}_{h|}E_x + \frac{\sum_{j=1}^h v^j d_{x+j-1}}{l_x} \right] = C \left[\frac{v^{h-x} l_{x+h} + \sum_{j=1}^h v^j d_{x+j-1}}{l_x} \right].$$

Per concludere questa breve trattazione, introduciamo e sviluppiamo il concetto di *riserva*, inteso come capitale da accantonare per la Compagnia, di fondamentale importanza, che verrà trattato di seguito.

4.1.5 La riserva matematica e la sua equazione di ricorrenza

L'ammontare da accantonare per una Compagnia durante lo svolgimento di un contratto, per far fronte a tutte le possibili prestazioni, è la differenza tra i valori attuali medi delle uscite e delle entrate, quindi delle prestazioni e dei premi, è una funzione che varia nel tempo e prende il nome di **riserva matematica**.

Definizione 69. *Si chiama* ***riserva matematica al tempo*** t *la differenza tra valor attuale medio delle prestazioni e valor attuale dei premi al tempo* t*:*

$$V(t) = W(X(t, t_N)) - W(P(t, t_N)). \tag{4.1.7}$$

Chiaramente, $V(0) = 0$, mentre nei periodi successivi è generalmente una quantità positiva. Se al tempo t si ha che $V(t) > 0$, questo valore rappresenta il debito netto della Compagnia nei confronti del contraente. Inoltre, può anche essere vista come il fondo in cui accumulare, periodo dopo periodo, i premi di riserva. Analizziamo ora la dinamica annua di (4.1.7) per poterne scrivere una nuova decomposizione in 2 diverse parti, ciascuna delle quali con un diverso significato.

Supponiamo di considerare h numero intero positivo, che indica l'anno di contratto di assicurazione a cui ci riferiamo. La riserva matematica all'anno precedente vale $V(h-1)$. Alla fine dell'$(h-1)$-esimo anno, viene pagato il premio per l'anno successivo, che chiamiamo P_h. Inoltre, denotiamo con $r = 1 + i$ il solito fattore di capitalizzazione su un anno, $v = 1/r$.

La somma riserva matematica + premio annuo si capitalizza per un anno, quindi. Detto C l'ammontare della prestazione da versare nel caso in cui si verifichi un certo evento nell'h-esimo anno, con probabilità q_h e probabilità complementare $p_h = 1 - q_h$, avremo la seguente relazione:

$$[V(h-1) + P_h]r = p_h V(h) + q_h C,$$

che esprime il fatto che, con probabilità p_h, l'evento non accade e quindi si va ad accantonare la riserva matematica $V(h)$ per l'anno successivo, con probabiità complementare invece si paga la prestazione di ammontare C.

Ora, ricordando la definizione (4.1.2), sul singolo anno si ha che N_h è il valor attuale medio della prestazione dovuta in quell'anno, e allora proprio

$$N_h = Cq_h v \implies N_h r = q_h C,$$

per cui la precedente relazione si può riscrivere come:

$$p_h V(h) = [V(h-1) + P_h - N_h]r. \tag{4.1.8}$$

La relazione (4.1.8) è già di per sè significativa, in quanto il membro di sinistra è il valor medio della riserva al tempo h, che corrisponde alla capitalizzazione della riserva, sommata alla differenza dei premi, al tempo precedente (cioè al premio di riserva annuo). Se poi la gestione fosse a premi naturali, cioè si scegliesse ogni anno il premio naturale come premio annuo, quindi $P_h = N_h$ per ogni $h \geq 0$, questo renderebbe sempre nulla la riserva matematica! Infatti, partendo da $V(0) = 0$ notiamo che:

$$p_1 V(1) = [V(0) + P_0 - N_0]r = [0 + 0 - 0]r = 0 \implies V(1) = 0,$$

$$p_2 V(2) = [V(1) + P_1 - N_1]r = [0 + 0 - 0]r = 0 \implies V(2) = 0,$$

e così via.

La relazione (4.1.8) prende pure il nome di **formula di ricorrenza per la riserva matematica**, e come un'equazione a differenze finite mette in relazione iterativamente, a ogni step, il valore della riserva dall'anno precedente a quello successivo.

Questa formula può essere ulteriormente lavorata per mettere in evidenza un'importante decomposizione del premio annuo P_h. Ricaviamo P_h:

$$P_h r = p_h V(h) + N_h r - V(h-1)r,$$

da cui, attualizzando entrambi i membri e riscrivendo $N_h = q_h C v$, otteniamo:

$$P_h = p_h V(h)v + q_h C v - V(h-1) = (1 - q_h)V(h)v + q_h C v - V(h-1),$$

da cui, mettendo in evidenza la probabilità dell'evento q_h e decomponendo:

$$P_h = q_h[C - V(h)]v + [V(h)v - V(h-1)] =^r P_h +^s P_h. \tag{4.1.9}$$

Entrambi gli addendi della (4.1.9) hanno uno specifico significato:

- ${}^r P_h = q_h[C - V(h)]v$ è il **premio di rischio**;
- ${}^s P_h = [V(h)v - V(h-1)]$ è il **premio di risparmio**.

L'interpretazione di ${}^r P_h$ è immediata: è il valore attuale medio della parte della prestazione eccedente la riserva matematica annua, da considerare se, con probabilità q_h, l'evento accade. Se la riserva matematica fosse sempre uguale alla prestazione, questa parte di premio sarebbe 0, e i rischi sarebbero azzerati. Invece il premio di risparmio ${}^s P_h$ corrisponde semplicemente all'incremento annuo della riserva matematica, che naturalmente, se visto al tempo $h-1$, richiede che al tempo successivo $V(h)$ sia attualizzato per un anno. Risulta facile notare che, se sommiamo la riserva matematica al tempo $h-1$ al premio di risparmio e capitalizziamo per 1 anno, otteniamo la riserva matematica al tempo successivo:

$$[V(h-1) +^s P_h]r = [V(h-1) + V(h)v - V(h-1)]r = V(h)v \cdot \frac{1}{v} = V(h).$$

4.1.6 Esercizi svolti e proposti

Esercizio 70. ***Consideriamo un contratto di assicurazione sulla vita che prevede il pagamento di*** 1000000 ***euro, se la morte del contraente avverrà entro*** 10 ***anni. Supponiamo che la probabilità di morte entro il primo anno sia*** 0.03 ***e poi incrementi dello*** 0.01 ***ogni anno e che il tasso tecnico annuo sia del*** 2.3%***, e supponiamo di poter stipulare il contratto o con un premio unico oppure in*** 20 ***premi costanti da versare a ogni semestre, anticipatamente. Calcolare:***

a) il premio unico P^u ***da versare anticipatamente;***

b) i 20 ***premi semestrali costanti*** P ***da versare a inizio di ogni semestre.***

Nel caso a), sapendo che le probabilità di morte sono, nei 10 *anni di pagamento dei premi, rispettivamente:* 0.03*,* 0.04*,* 0.05*,* 0.06*,* 0.07*,* 0.08*,* 0.09*,* 0.1*,* 0.11*,* 0.12*, e che le corrispondenti probabilità di sopravvivenza sono:* 0.97*,* 0.96*,* 0.95*,* 0.94*,* 0.93*,* 0.92*,* 0.91*,* 0.9*,* 0.89*, avremo il seguente valore attuale medio del flusso delle prestazioni:*

$$W(X(0,10)) = 1000000 \cdot \big(0.03 \cdot (1.023)^{-1} + 0.97 \cdot 0.04 \cdot (1.023)^{-2} +$$
$$+0.96 \cdot 0.05 \cdot (1.023)^{-3} + 0.95 \cdot 0.06 \cdot (1.023)^{-4} + 0.94 \cdot 0.07 \cdot (1.023)^{-5} +$$
$$+0.93 \cdot 0.08 \cdot (1.023)^{-6} + 0.92 \cdot 0.09 \cdot (1.023)^{-7} + 0.91 \cdot 0.1 \cdot (1.023)^{-8} +$$
$$+0.9 \cdot 0.11 \cdot (1.023)^{-9} + 0.89 \cdot 0.12 \cdot (1.023)^{-10}\big) = 599145.5 \textit{ euro},$$

che per il Principio di Equivalenza Attuariale è il premio unico $P^u = 599145.5$ *euro.*

Nel caso b), essendo la rendita in questione semestrale, prima di tutto bisogna calcolare il tasso $i_{1/2}$ *equivalente al tasso annuo* $i = 0.023$*:*

$$i_{1/2} = \sqrt{1.023} - 1 = 0.0114.$$

Ora, chiamando P *il premio semestrale costante da determinare e notando che lo schema delle prestazioni resta con periodicità annua, e quindi il valore attuale* *medio del flusso delle prestazioni è sempre* 599145.5 *euro, scriviamo la formula per il valore attuale medio del flusso dei premi:*

$$W(P(0,10)) = P\left[1 + 0.97 \cdot ((1.0114)^{-1} + (1.0114)^{-2}) + \right.$$
$$+ 0.96 \cdot ((1.0114)^{-3} + (1.0114)^{-4}) + 0.95 \cdot ((1.0114)^{-5} + (1.0114)^{-6}) +$$
$$+ 0.94 \cdot ((1.0114)^{-7} + (1.0114)^{-8}) + 0.93 \cdot ((1.0114)^{-9} + (1.0114)^{-10}) +$$
$$+ 0.92 \cdot ((1.0114)^{-11} + (1.0114)^{-12}) + 0.91 \cdot ((1.0114)^{-13} + (1.0114)^{-14}) +$$
$$+ 0.9 \cdot ((1.0114)^{-15} + (1.0114)^{-16}) + 0.89 \cdot ((1.0114)^{-17} + (1.0114)^{-18}) +$$
$$\left. + 0.88 \cdot (1.0114)^{-19}\right] = 599145.5 \qquad \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \qquad P = \frac{599145.5}{16.85} = 35557.596 \textit{ euro}$$

ossia, pagando all'inizio di ogni semestre una rata di 35557.596 *euro, si ottiene un valore attuale medio dei premi uguale a quello delle prestazioni, anche se le periodicità sono differenti.*

Esercizio 71. ***Consideriamo il contratto di assicurazione sulla vita stipulato al tempo*** 0 ***con le seguenti caratteristiche:***

- ***viene pagato un premio unico*** P^u ***euro al tempo*** $t = 0$***;***
- ***prevede il pagamento di una prestazione di*** 120000 ***euro al termine dell'anno di morte se la morte del contraente avviene entro*** 3 ***anni;***
- ***le probabilità di morte del contraente sono*** 0.24 ***durante il primo anno,*** 0.31 ***durante il secondo e*** 0.39 ***durante il terzo;***
- ***il tasso tecnico di valutazione è*** 1% ***annuo.***

a) Calcolare il premio unico P^u ***tale che il Principio di Equivalenza Attuariale sia soddisfatto.***

b) Utilizzando P^u ***calcolato in precedenza, calcolare la riserva matematica alle scadenze annuali:*** $V(0)$***,*** $V(1)$***,*** $V(2)$***,*** $V(3)$***.***

Primo punto: calcoliamo preliminarmente $W(X(0,3))$*, che per il Principio di Equivalenza Attuariale è uguale a* P^u*, come già fatto in precedenza:*

$$P^u = W(X(0,3)) = 120000\left[0.24 \cdot (1.01)^{-1} + 0.76 \cdot 0.31 \cdot (1.01)^{-2} + \right.$$

$$+0.69 \cdot 0.39 \cdot (1.01)^{-3}\big] = 87572.078 \text{ euro.}$$

Per quanto riguarda la riserva matematica, calcoliamo preliminarmente tutti i valori attuali medi dei flussi dei premi e delle prestazioni nei tempi 0, 1, 2, 3, *successivamente applichiamo la relazione (4.1.7). Avremo:*

$$W(P(0,3)) = P^u = 87572.078 \text{ euro.}$$

$$W(P(1,3)) = W(P(2,3)) = W(P(3,3)) = 0,$$

in quanto nessun altro premio è previsto che sia pagato negli anni successivi (è il caso standard quando il premio è unico). Invece, non sono nulli i flussi delle prestazioni, eccetto l'ultimo:

$$W(X(0,3)) = 87572.078 \text{ euro.}$$

$$W(X(1,3)) = 120000\left[0.76 \cdot 0.31 \cdot (1.01)^{-2} + 0.69 \cdot 0.39 \cdot (1.01)^{-3}\right] =$$

$$= 59057.226 \text{ euro.}$$

$$W(X(2,3)) = 120000\left[0.69 \cdot 0.39(1.01)^{-3}\right] = 31342.296 \text{ euro.}$$

$$W(X(3,3)) = 0,$$

perchè al tempo $t = 3$ *il contratto scade.*

In definitiva, i valori della riserva matematica nei tempi richiesti risultano:

$$V(0) = 87572.078 - 87572.078 = 0.$$

$$V(1) = W(X(1,3)) - W(P(1,3)) = 59057.226 - 0 = 59057.226 \text{ euro.}$$

$$V(2) = W(X(2,3)) - W(P(2,3)) = 31342.296 - 0 = 31342.296 \text{ euro.}$$

$$V(3) = W(X(3,3)) - W(P(3,3)) = 0 - 0 = 0.$$

Esercizio 72. ***Consideriamo il contratto di assicurazione sulla vita stipulato al tempo* 0 *con le seguenti caratteristiche:***

- ***vengono pagati* 2 *premi all'inizio del primo e del secondo anno dopo la stipula;***
- ***la prestazione di* 500000 *euro al termine dell'anno di morte se la morte del contraente avviene entro* 2 *anni;***
- ***le probabilità di morte del contraente sono* 0.45 *durante il primo anno e* 0.61 *durante il secondo;***

- ***il tasso tecnico di valutazione è*** 1.5% ***annuo.***

a) Calcolare i premi naturali N_1 ***ed*** N_2***.***
b) Calcolare i premi periodici annui e i premi di riserva.
c) Determinare la riserva matematica $V(1)$ ***e*** $V(2)$***.***

Iniziamo dal punto a), che richiede il calcolo dei premi naturali, per cui usiamo la formula (4.1.2):

$$N_1 = W(X(0,1)) = 500000 \cdot 0.45 \cdot (1.015)^{-1} = 221674.876 \textit{ euro.}$$

$$N_2 = W(X(1,2)) = 500000 \cdot 0.61 \cdot (1.015)^{-1} = 300492.61 \textit{ euro.}$$

Invece, al punto b), il calcolo dei premi periodici si basa sulla relazione (4.1.3):

$$P = \frac{N_1 +_{1|} p_2 N_2}{1 +_{1|} p_2 (1+i)^{-1}} = \frac{221674.876 + 0.55 \cdot 300492.61}{1 + 0.55 \cdot (1.015)^{-1}} = 250958.465 \textit{ euro.}$$

Successivamente, troviamo per differenza anche i premi di riserva, rispettivamente:

$$P_1^R = P - N_1 = 250958.465 - 221674.876 = 29283.589 \textit{ euro.}$$

$$P_2^R = P - N_2 = 250958.465 - 300492.61 = -49534.145 \textit{ euro.}$$

Infine, al punto c), va calcolata la riserva matematica, per la quale abbiamo bisogno dei valori attuali attesi dei flussi agli anni 1 *e* 2*, considerando i premi periodici* $P = 250958.465$*. Abbiamo:*

$$V(1) = W(X(1,2)) - W(P(1,2)) = 300492.61 - (250958.465 \cdot 0.55 \cdot (1.015)^{-1}) =$$

$$= 300492.61 - 135987.345 = 164505.265 \textit{ euro.}$$

$$V(2) = W(X(2,2)) - W(P(2,2)) = 0 - 0 = 0.$$

Esercizio 73. ***Data una polizza che tra gli anni*** 3 ***e*** 4 ***ha i seguenti valori rilevanti:***

- ***le riserve matematiche valgono*** $V(3) = 125000$***,*** $V(4) = 140000$***;***
- ***il capitale da rimborsare è*** $C = 250000$ ***euro;***
- ***la probabilità che si verifichi l'evento che comporta la prestazione nell'anno*** 4 ***è*** $q_4 = 0.35$***;***

- ***il tasso tecnico annuale è*** $i = 0.014$***;***

determinare i premi di rischio e di risparmio ${}^{r}P_4$ ***e*** ${}^{s}P_4$***.***

Applicando semplicemente le due formule relative, si ha:

$${}^{r}P_4 = q_4 \cdot [C - V(4)](1+i)^{-1} = 0.35[250000 - 140000](1.014)^{-1} = 37968.441 \text{ euro.}$$

$${}^{s}P_4 = V(4)(1+i)^{-1} - V(3) = 140000(1.014)^{-1} - 125000 = 13067.061 \text{ euro.}$$

Esercizio 74. ***Consideriamo il contratto di assicurazione morte vita intera in cui:***

- ***il premio unico*** $P^u = 250000$ ***euro;***
- ***il tasso tecnico utilizzato è del*** 2.3%***;***
- ***il contratto viene stipulato da una testa di età*** 95 ***anni.***

Calcolare il capitale C ***da versare per la Compagnia, considerando la tabella ISTAT nella Sezione*** 3.2***.***

Usiamo la formula (4.1.6) invertita:

$$C = \frac{250000 \cdot 1.023^5}{\frac{20550}{31202} + \frac{1.023^{-5} \cdot 8771}{10652} + \frac{1.023^{-10} \cdot 1767}{1881} + \frac{1.023^{-15} \cdot 112}{113} + \frac{1.023^{-20} \cdot 1}{1}} =$$

$$= 80463.067 \text{ euro.}$$

Altri esercizi proposti:

1. **Calcolare il premio unico di un'assicurazione sulla vita che prevede il pagamento del capitale** $C = 700000$ **euro entro** 2 **anni, sapendo che le probabilità di morte sono** 0.72 **e** 0.78 **nei** 2 **anni di contratto, considerando un tasso tecnico del** 2.1%**.**

   [$P^u = 640289.474$ euro]

2. **Data un'assicurazione sulla vita di** 3 **anni, e di premio periodico annuo** $P = 50000$ **euro, in cui le probabilità di sopravvivenza sono** 0.4 **al primo anno,** 0.3 **al secondo e** 0.2 **al terzo, al tasso tecnico del** 2%**, calcolare quale deve essere il capitale** C **da versare per la Compagnia in caso di morte dell'assicurato.**

   [77548.593 euro]

3. **Data una polizza la cui riserva matematica agli anni** 10 **e** 11 **ha valori** $V(10) = 34000$ **euro,** $V(2) = 31000$ **euro, calcolare il tasso tecnico annuo affinchè il suo premio di risparmio all'undicesimo anno sia** ${}^{s}P_{11} = 1500$ **euro.**

   [4.61%]

Bibliografia consigliata

[ABRZ] Elisabetta Allevi, Gianni Bosi, Rossana Riccardi, Magalì Zuanon, *Matematica finanziaria e attuariale*, Pearson Italia, Milano, Torino (2017).

[B] Paolo Baldi, *Calcolo delle Probabilità e Statistica*, Milano, McGraw-Hill Libri Italia (1998).

[BE] Fabio Bellini, sito docente UNIMIB, dispense sul Modello Binomiale, $www.economia.unimib.it/DATA/moduli/8_7236/materiale/modellobinomiale.pdf$

[C] Fabrizio Cacciafesta, *Lezioni di Matematica Finanziaria classica e moderna*, Torino, G. Giappichelli Editore (2001).

[M] Franco Moriconi, *Matematica Finanziaria*, Bologna, Il Mulino (1994).

[O] *Opzione (finanza)*, Wikipedia,
$http://it.wikipedia.org/wiki/Opzione_(finanza)$.

[PA] Arsen Palestini, sito docente UNIROMA1, dispense di Matematica Finanziaria,
$https://www.memotef.uniroma1.it/node/6239$.

[PR] Andrea Pascucci, Wolfgang Runggaldier, *Finanza Matematica*, Milano, Springer Italia (2009).

[R] Daniele Ritelli, *Matematica Finanziaria*, Bologna, Società Editrice Esculapio (2013).

[S] Mogens Steffensen, Seven Introductory Lectures on Actuarial Mathematics,
$http://www.math.ku.dk/\ mogens/SILAMupdate.pdf$.

[SL] Erik V. Slud, *Actuarial Mathematics and Life-Table Statistics*, Chapman & Hall/CRC, 2012.

[TMI] *Tavole di mortalità ISTAT 1974-2015*, $http://demo.istat.it/tvm2016/index.php?lingua=ita$.